DEVOIR SURVEILLÉ 2

Exercice 1 –

1. $A = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{6}{6} - \dfrac{2}{6} + \dfrac{3}{6} = \dfrac{6-2+3}{6} = \dfrac{7}{6}$
2. $B = 3\left(1 - \dfrac{1}{5}\right) + 2 \times \dfrac{3}{7} = 3 \times \left(\dfrac{5}{5} - \dfrac{1}{5}\right) + \dfrac{6}{7} = 3 \times \dfrac{4}{5} + \dfrac{6}{7} = \dfrac{12}{5} + \dfrac{6}{7} = \dfrac{84}{35} + \dfrac{30}{35} = \dfrac{114}{35}$
3. $C = \dfrac{1 + \frac{1}{3}}{\frac{2}{7} + 3\left(2 - \frac{1}{2}\right)} = \dfrac{\frac{3}{3} + \frac{1}{3}}{\frac{2}{7} + 3 \times \frac{3}{2}} = \dfrac{\frac{3+1}{3}}{\frac{2}{7} + \frac{9}{2}} = \dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{14} + \frac{63}{14}} = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{14}{67} = \dfrac{56}{201}$
4. $D = \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}\right) \times \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{4}{3}\right) \div \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{2}{6} - \dfrac{3}{6}\right) \times \left(\dfrac{3}{12} - \dfrac{16}{12}\right) \div \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{6} \times \left(-\dfrac{13}{12}\right) \times 2 = \dfrac{13}{36}$

Exercice 2 –

1. Je résous : $2x - 4 = 1 \iff 2x = 5 \iff x = \dfrac{5}{2}$. Donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{5}{2}\right\}$.
2. Je résous : $x + 3 \leqslant 2x - 1 \iff 3 + 1 \leqslant 2x - x \iff x \geqslant 4$. Donc $\mathcal{S} = [4, +\infty[$.
3. Je me ramène à une étude de signe :

$$\frac{x+2}{x-3} \leqslant 3 \quad \iff \quad \frac{(x+2) - 3(x-3)}{x-3} \leqslant 0 \quad \iff \quad \frac{-2x+11}{x-3} \leqslant 0.$$

J'établis désormais le tableau de signe de $\dfrac{-2x+11}{x-3}$:

x	$-\infty$		3		$\frac{11}{2}$		$+\infty$
$-2x+11$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-2x+11}{x-3}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

Donc $\mathcal{S} =]-\infty, 3[\cup \left[\dfrac{11}{2}, +\infty\right[$.

4. Je commence par chercher les éventuelles valeurs interdites : $x - 2 = 0 \iff x = 2$.
Ensuite, $4x - 1 = 0 \iff x = \dfrac{1}{4}$. Cette valeur ne fait pas partie des valeurs interdites.
Donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{4}\right\}$.
5. Je calcule le discriminant du polynôme : $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 2 \times 12 = 100 - 96 = 4 > 0$.
Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-10) - \sqrt{4}}{2 \times 2} = \frac{10-2}{4} = \frac{8}{4} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10+2}{4} = \frac{12}{4} = 3.$$

Donc $\mathcal{S} = \{2, 3\}$.

6. Je calcule le discriminant du polynôme : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 4 + 12 = 16 > 0$.
Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \times (-1)} = \frac{2-4}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2+4}{-2} = -\frac{6}{2} = -3.$$

J'établis le tableau de signe de $-x^2 - 2x + 3$:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$-x^2 - 2x + 3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $\mathcal{S} =]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$.

7. Je pose $P(x) = 6x^3 + 7x^2 - x - 2$. Comme $P(-1) = -6 + 7 + 1 - 2 = 0$, alors -1 est une racine du polynôme $P(x)$ et donc il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = \big(x - (-1)\big)Q(x) = (x+1)Q(x)$.
Je détermine le polynôme $Q(x)$ par division euclidienne :

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & 6x^3 & + & 7x^2 & - & x & - & 2 & x+1 \\ \cline{9-9}
- & \big(6x^3 & + & 6x^2\big) & & & & & 6x^2 + x - 2 \\ \cline{2-8}
 & & & x^2 & - & x & - & 2 & \\
 & & - & \big(x^2 & + & x\big) & & & \\ \cline{4-8}
 & & & & & -2x & - & 2 & \\
 & & & & - & \big(-2x & - & 2\big) & \\ \cline{6-8}
 & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Finalement j'obtiens que $P(x) = (x+1)\big(6x^2 + x - 2\big)$.
Je calcule alors le discriminant du facteur de degré 2 : $\Delta = 1^2 - 4 \times 6 \times (-2) = 1 + 48 = 49 > 0$.
Ce facteur admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{49}}{2 \times 6} = \frac{-1-7}{12} = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+7}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{-1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right\}$.

Exercice 3 –

1. La fonction a est une fonction polynomiale donc a est définie sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction b est une fraction rationnelle dont je cherche les valeurs interdites. Celles-ci sont les solutions de $4x - 1 = 0 \iff 4x = 1 \iff x = \frac{1}{4}$. Donc b est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}$.
3. La fonction c est une fraction rationnelle dont je cherche les valeurs interdites. Celles-ci sont les solutions de $x^2 - 5x + 6 = 0$, dont le discriminant est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$.
Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Donc c est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$.

4. La fonction d est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2 - 2x - 3$, définie lorsque $u(x) = x^2 - 2x - 3 \geqslant 0$.
   Je calcule le discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$.
   Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

   J'établis alors le tableau de signe de $u(x)$:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Donc d est définie sur $]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$.

5. La fonction e est une somme, de la forme $e_1 + e_2$ avec $e_1(x) = \dfrac{1}{x}$ et $e_2(x) = 4x - 5$.
   e_1 est la fonction inverse, définie sur $\mathbb{R}^*$ et e_2 est une fonction polynomiale, définie sur $\mathbb{R}$.
   Donc e est définie sur l'intersection $\mathbb{R}^* \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}^*$.
6. La fonction f est de la forme $\sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = \dfrac{2x-1}{-x+3}$, définie lorsque $u(x) = \dfrac{2x-1}{-x+3} \geqslant 0$.
   J'établis le tableau de signe de $u(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{2x-1}{-x+3}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

   Donc f est définie sur $\left[\dfrac{1}{2}, 3\right[$.

Exercice 4 –

1. La fonction f est une fraction rationnelle dont je cherche les valeurs interdites. Celles-ci sont les solutions de $2x - 3 = 0 \iff 2x = 3 \iff x = \dfrac{3}{2}$. Donc f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.
   La fonction g est une fonction polynomiale donc g est définie sur $\mathbb{R}$.
2. f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ qui n'est pas symétrique par rapport à 0. Donc f ne peut être ni paire, ni impaire. g en revanche est définie sur $\mathbb{R}$, qui est bien symétrique par rapport à 0.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. Je calcule alors $g(-x)$: $g(-x) = 2(-x)^2 + 3 = 2x^2 + 3 = g(x)$. Donc g est paire.
3. Je détermine les expressions des fonctions composées :

$$f \circ f(x) = f\left(\frac{1}{2x-3}\right) = \frac{1}{2 \times \frac{1}{2x-3} - 3} = \frac{1}{\frac{2}{2x-3} - \frac{3(2x-3)}{2x-3}} = \frac{1}{\frac{2-6x+9}{2x-3}} = \frac{2x-3}{-6x+11}$$

   $f \circ f$ est une fraction rationnelle dont je cherche les valeurs interdites. Celles-ci sont les solutions de $-6x + 11 = 0$, *i.e.* $x = \dfrac{11}{6}$. Donc $f \circ f$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{11}{6}\right\}$.

$$f\circ g(x)=f\left(2x^2+3\right)=\frac{1}{2\left(2x^2+3\right)-3}=\frac{1}{4x^2+6-3}=\frac{1}{4x^2+3}$$

$f\circ g$ est une fraction rationnelle qui n'a pas de valeur interdite, puisque $4x^2+3\geqslant 3>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Donc $f\circ g$ est définie sur $\mathbb{R}$.

$$g\circ g(x)=g\left(2x^2+3\right)=2\left(2x^2+3\right)^2+3=8x^4+24x^2+18+3=8x^4+24x^2+21$$

$g\circ g$ est une fonction polynomiale donc $g\circ g$ est définie sur $\mathbb{R}$.

$$g\circ f(x)=g\left(\frac{1}{2x-3}\right)=2\left(\frac{1}{2x-3}\right)^2+3=\frac{2+3(2x-3)^2}{(2x-3)^2}=\frac{2+3\left(4x^2-12x+9\right)}{(2x-3)^2}=\frac{12x^2-36x+29}{(2x-3)^2}$$

$g\circ f$ est une fraction rationnelle dont l'unique valeur interdite est $x=\dfrac{3}{2}$.
Donc $g\circ f$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

Exercice 5 –

1. Par lecture graphique, j'obtiens le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f		$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Par lecture graphique, j'obtiens le tableau de signe de la fonction g :

x	$-\infty$		-4		6		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. a) Je développe la forme factorisée donnée par l'énoncé afin de retomber sur la définition de $f(x)$:

$$\frac{(x+4)(x-2)^2}{16}=\frac{x^3-4x^2+4x+4x^2-16x+16}{16}=\frac{x^3-12x+16}{16}=\frac{x^3}{16}-\frac{3}{4}x+1=f(x).$$

J'ai bien montré que pour tout réel x, $f(x)=\dfrac{(x+4)(x-2)^2}{16}$.

b) J'étudie le signe de $f(x)$ grâce à la forme factorisée. Un carré est toujours positif et 16 est un nombre strictement positif, donc j'établis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

3. Je commence par calculer le discriminant : $\Delta = \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{8}\right) \times 3 = \frac{1}{16} + \frac{12}{8} = \frac{25}{16} > 0$.
   Le polynôme admet donc deux racines :
   $$x_1 = \frac{-\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{25}{16}}}{2 \times \left(-\frac{1}{8}\right)} = \frac{-\frac{1}{4} - \frac{5}{4}}{-\frac{1}{4}} = \frac{-6}{-1} = 6 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{5}{4}}{-\frac{1}{4}} = \frac{4}{-1} = -4.$$
   J'en déduis donc la factorisation de $g(x)$:
   $$g(x) = -\frac{1}{8} \times (x+4)(x-6) = -\frac{(x+4)(x-6)}{8} = \frac{(x+4)(6-x)}{8}.$$

4. a) Grâce aux deux factorisations trouvées précédemment pour $f(x)$ et $g(x)$, alors je peux écrire pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,
   $$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{(x+4)(x-2)^2}{16} - \frac{(x+4)(6-x)}{8} = \frac{(x+4)\big((x-2)^2 - 2(6-x)\big)}{16} \\ &= \frac{(x+4)\big(x^2 - 4x + 4 - 12 + 2x\big)}{16} = \frac{(x+4)\big(x^2 - 2x - 8\big)}{16}. \end{aligned}$$

   b) Comme $f(x) \leqslant g(x) \iff f(x) - g(x) \leqslant 0$, il me suffit d'étudier le signe de $f(x) - g(x)$.
   J'utilise l'expression établie à la question précédente et m'intéresse au facteur de degré 2.
   Le discriminant de $x^2 - 2x - 8$ est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 4 + 32 = 36 > 0$.
   Le polynôme admet donc deux racines
   $$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{36}}{2 \times 1} = \frac{2-6}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$
   Je peux alors établir le tableau de signe de $f(x) - g(x)$:

x	$-\infty$		-4		-2		4		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-2x-8		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

   Ainsi les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$ se trouvent dans $\mathcal{S} = \left]-\infty, -4\right] \cup \left[-2, 4\right]$.

5. Le tableau de signe de f obtenu à la question **2.a)** est bien cohérent avec le graphique fourni. Aussi, en accord avec la question **4.b)**, la courbe $\mathcal{C}_f$ est bien en dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $\left]-\infty, -4\right] \cup \left[-2, 4\right]$ et au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $\left[-4, -2\right] \cup \left[4, +\infty\right[$. Ceci est également cohérent avec le graphique fourni.

Exercice 6 –

1. Graphiquement, j'obtiens que :
   a) $f(0) = -6$,
   b) l'image de 3 par f est $f(3) = 0$,
   c) les antécédents de -4 par f sont -1 et 2,
   d) l'unique antécédent de 10 par f est 4.5,

e) les antécédents de -6 par f sont 0 et 1,
f) l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 5 est 14,
g) les solutions de l'équation $f(x) = 3$ sont -2.5 et 3.5.

2. Je remplace x par $\frac{1}{2}$ dans la formule de $f(x)$ et j'obtiens que

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 6 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6 = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} - \frac{24}{4} = -\frac{25}{4}.$$

3. Je développe le produit donné dans le but de retrouver la définition de $f(x)$:

$$(x-3)(x+2) = x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 - x - 6 = f(x).$$

4. Grâce à la question précédente,

$$f(x) = 0 \iff (x-3)(x+2) = 0 \iff x-3 = 0 \text{ ou } x+2 = 0 \iff x = 3 \text{ ou } x = -2.$$

Je retrouve donc bien le fait que les antécédents de 0 par f sont -2 et 3.

Exercice 7 –

1. FAUX, $\left[-1,-3\right]$ n'a même pas de sens mathématique.
2. FAUX, $\left[5,2\right]$ n'a même pas de sens mathématique.
3. VRAI, la flèche monte de 2 à 4 sur cet intervalle.
4. VRAI, -3 est le minimum de f sur $\left[-5,12\right]$.
5. FAUX, puisque le minimum de f sur $\left[-5,12\right]$ est -3.
6. VRAI, puisque $f(9) = 2 < 4 < 5 = f(4)$ et que f est décroissante sur $\left[4,9\right]$.
7. VRAI, puisque $f(12) = 4$ et que f est croissante sur $\left[9,12\right]$.

Exercice 8 –

1. Je remplace n par les valeurs données dans la définition de u_n :

$$u_0 = \frac{3\times 0+4}{0+1} = \frac{4}{1} = 4, \qquad u_1 = \frac{3+4}{1+1} = \frac{7}{2}, \qquad u_2 = \frac{6+4}{2+1} = \frac{10}{3} \quad \text{et} \quad u_3 = \frac{9+4}{3+1} = \frac{13}{4}.$$

2. Pour les expressions suivantes, j'obtiens

$$\begin{aligned}
u_{n-1} &= \frac{3(n-1)+4}{n-1+1} = \frac{3n-3+4}{n} = \frac{3n+1}{n},\\
u_n - 1 &= \frac{3n+4}{n+1} - 1 = \frac{3n+4}{n+1} - \frac{n+1}{n+1} = \frac{2n+3}{n+1},\\
u_{n+2} &= \frac{3(n+2)+4}{n+2+1} = \frac{3n+6+4}{n+3} = \frac{3n+10}{n+3},\\
u_n + 2 &= \frac{3n+4}{n+1} + 2 = \frac{3n+4}{n+1} + \frac{2(n+1)}{n+1} = \frac{3n+4+2n+2}{n+1} = \frac{5n+6}{n+1},\\
u_{2n-1} &= \frac{3(2n-1)+4}{2n-1+1} = \frac{6n-3+4}{2n} = \frac{6n+1}{2n},\\
u_{2n} - 1 &= \frac{3\times 2n+4}{2n+1} - 1 = \frac{6n+4}{2n+1} - \frac{2n+1}{2n+1} = \frac{4n+3}{2n+1},\\
2u_n - 1 &= 2\times\frac{3n+4}{n+1} - 1 = \frac{6n+8}{n+1} - \frac{n+1}{n+1} = \frac{5n+7}{n+1}.
\end{aligned}$$

3. Le terme d'indice $n+1$ est donné par

$$u_{n+1} = \frac{3(n+1)+4}{n+1+1} = \frac{3n+3+4}{n+2} = \frac{3n+7}{n+2}.$$

Exercice 9 –

1. Grâce à la relation de récurrence donnée par l'énoncé,

$$u_1 = 0.65u_0 + 861 = 0.65 \times 1760 + 861 = 13 \times 88 + 861 = 1144 + 861 = 2005,$$
$$\text{et} \quad u_2 = 0.65u_1 + 861 = 0.65 \times 2005 + 861 = 1300 + 3.25 + 861 = 2164.25.$$

2. En comparant les quotients de deux termes consécutifs (ce qui est possible puisque les termes sont non nuls), j'obtiens que

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{1760}{2005} = \frac{352}{401} \quad \text{et} \quad \frac{u_2}{u_1} = \frac{2164.25}{2005} = \frac{8657}{8020} \neq \frac{352}{401}.$$

En conclusion, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas géométrique.

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. J'exprime v_{n+1} en fonction de v_n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2460 = 0.65 \times u_n + 861 - 2460 = 0.65 \times u_n - 1599 \\ &= 0.65 \times (v_n + 2460) - 1599 = 0.65v_n + 1599 - 1599 = 0.65v_n. \end{aligned}$$

Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, de raison $q = 0.65$.
Son premier terme est donné par $v_0 = u_0 - 2460 = 1760 - 2460 = -700$.

b) Comme la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, alors pour tout entier naturel n,

$$v_n = v_0 \times q^n = -700 \times 0.65^n.$$

Par ailleurs, comme $u_n = v_n + 2460$, alors j'obtiens que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2460 - 700 \times 0.65^n.$$

Exercice 10 –

1. a)
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{4} \frac{3}{(1+k)^2} &= \frac{3}{(1+0)^2} + \frac{3}{(1+1)^2} + \frac{3}{(1+2)^2} + \frac{3}{(1+3)^2} + \frac{3}{(1+4)^2} = \frac{3}{1} + \frac{3}{4} + \frac{3}{9} + \frac{3}{16} + \frac{3}{25} \\ &= 3 + \frac{1}{3} + \frac{3}{25} + \frac{3\times 4+3}{16} = 3 + \frac{1}{3} + \frac{3}{25} + \frac{15}{16} = 3 + \frac{1}{3} + \frac{3\times 16 + 15\times 25}{400} \\ &= 3 + \frac{1}{3} + \frac{423}{400} = 3 + \frac{400 + 3\times 423}{1200} = 3 + \frac{1669}{1200} = \frac{3600+1669}{1200} = \frac{5269}{1200}. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3} \frac{k}{k^2+1} + \sum_{k=0}^{2} (k+2)^2 &= \frac{1}{1^2+1} + \frac{2}{2^2+1} + \frac{3}{3^2+1} + (0+2)^2 + (1+2)^2 + (2+2)^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + 4 + 9 + 16 = \frac{5+4+3}{10} + 29 = \frac{6}{5} + 29 \\ &= \frac{6 + 29\times 5}{5} = \frac{151}{5}. \end{aligned}$$

2. a) $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}} + \cdots + \sqrt{\frac{1}{100}} = \sum_{k=2}^{100} \sqrt{\frac{1}{k}}$

b) $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots - 98 + 99 = \sum_{k=1}^{99} (-1)^{k+1} \times k$

c) $1 + \frac{4}{9} + \frac{1}{4} + \frac{4}{25} + \frac{1}{9} + \frac{4}{49} + \frac{1}{16} + \frac{4}{81} + \frac{1}{25} = \frac{4}{4} + \frac{4}{9} + \frac{4}{16} + \frac{4}{25} + \frac{4}{36} + \frac{4}{49} + \frac{4}{64} + \frac{4}{81} + \frac{4}{100} = \sum_{k=2}^{10} \frac{4}{k^2}$