

DEVOIR MAISON 2

Exercice 1 –

1. Je remplace x par -1 dans l'expression de $P(x)$:

$$P(-1) = (-1)^3 - 21 \times (-1) - 20 = -1 + 21 - 20 = 0.$$

2. Comme $P(-1) = 0$, alors -1 est une racine de $P(x)$ donc il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x+1)Q(x)$. Pour déterminer $Q(x)$, j'effectue la division euclidienne de $P(x)$ par $x+1$:

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 x^3 \qquad \qquad - 21x \quad - 20 \\
 - (x^3 + \quad x^2) \\
 \hline
 \qquad -x^2 \quad - 21x \quad - 20 \\
 - (-x^2 \quad - \quad x) \\
 \hline
 \qquad \qquad -20x \quad - 20 \\
 - (-20x \quad - 20) \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad \qquad 0
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 x+1 \\
 \hline
 x^2 - x - 20
 \end{array}
 \end{array}$$

Ainsi j'ai montré que $Q(x) = x^2 - x - 20$ et donc que $P(x) = (x+1)(x^2 - x - 20)$.

3. Afin de connaître le signe de $P(x)$, je cherche celui de $Q(x)$ et pour cela, cherche ses racines. Je calcule le discriminant de $Q(x)$: $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-20) = 1 + 80 = 81 > 0$. Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{81}}{2 \times 1} = \frac{1-9}{2} = -4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+9}{2} = 5.$$

J'en déduis le tableau de signe suivant pour $P(x)$:

x	$-\infty$	-4	-1	5	$+\infty$
$x+1$	-	-	0	+	+
$x^2 - x - 20$	+	0	-	0	+
$P(x)$	-	0	+	0	+

Et donc les solutions de $P(x) \geq 0$ se trouvent dans $\mathcal{S} = [-4, -1] \cup [5, +\infty[$.

4. La fonction f est de la forme $f(x) = \sqrt{P(x)}$ donc le domaine de définition de f est donné par l'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x) \geq 0$. D'après la question précédente, f est donc définie sur

$$D_f = [-4, -1] \cup [5, +\infty[.$$

5. La fonction g est de la forme $g = h + f$ avec $h(x) = \sqrt{x^2 - 5x - 14}$ et f la fonction étudiée à la question précédente. Donc la fonction g est définie là où les deux racines carrées sont définies, i.e. $D_g = D_h \cap D_f$.

J'ai déjà déterminé D_f à la question précédente, il me reste à déterminer D_h .

Pour cela, il me faut résoudre l'inéquation $x^2 - 5x - 14 \geq 0$.

Je commence par calculer le discriminant : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (-14) = 25 + 56 = 81 > 0$.

Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{81}}{2 \times 1} = \frac{5-9}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+9}{2} = 7.$$

J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-2	7	$+\infty$	
$x^2 - 5x - 14$	$+$	0	$-$	0	$+$

Et donc h est définie sur $D_h =]-\infty, -2] \cup [7, +\infty[$.

Finalement la fonction g est définie sur

$$D_g = D_h \cap D_f = [-4, -2] \cup [7, +\infty[.$$

Exercice 2 –

- Le nombre d'arbres en milliers d'unités au cours de l'année $2020 + n$ est donnée par u_n . Ce nombre diminue de 5% chaque année, autrement dit, il est multiplié par $1 - 0.05 = 0.95$. Par ailleurs, 3000 nouveaux arbres sont plantés chaque année. Tout ceci m'amène donc à l'expression suivante :

$$u_{n+1} = 0.95u_n + 3.$$

- a) Soit $n \in \mathbb{N}$. J'exprime v_{n+1} en fonction de v_n afin de montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 60 - u_{n+1} = 60 - (0.95u_n + 3) = 60 - 0.95u_n - 3 = 57 - 0.95u_n \\ &= 57 - 0.95 \times (60 - v_n) = 57 - 57 + 0.95v_n = 0.95v_n. \end{aligned}$$

J'ai bien montré que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 0.95.

- b) Je calcule le premier terme de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$v_0 = 60 - u_0 = 60 - 50 = 10.$$

- c) Comme la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique, je connais son expression explicite :

$$v_n = v_0 \times q^n = 10 \times 0.95^n.$$

- d) En me servant de la relation entre u_n et v_n et de l'expression explicite de v_n , alors j'en déduis que pour tout entier n ,

$$u_n = 60 - v_n = 60 - 10 \times 0.95^n.$$

3. Le nombre d'arbres de la forêt (en milliers) en 2030 correspond à u_{10} . Alors

$$u_{10} = 60 - 10 \times 0.95^{10} \approx 60 - 10 \times 0.60 = 60 - 6 = 54.$$

Ainsi il y aura donc environ 54000 arbres dans cette forêt en 2030.

Exercice 3 – Afin de faciliter la résolution de l'exercice, j'introduis les événements suivants :

- R_1 : "la première boule tirée est rouge",
- R_2 : "la deuxième boule tirée est rouge",
- V_1 : "la première boule tirée est verte",
- V_2 : "la deuxième boule tirée est verte",
- B_1 : "la première boule tirée est bleue",
- B_2 : "la deuxième boule tirée est bleue".

1. Je cherche ici $P(V_1 \cap V_2)$. D'après la formule des probabilités composées,

$$P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \times P_{V_1}(V_2) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

La probabilité que les deux boules tirées soient vertes est $\frac{1}{12}$.

2. Je cherche ici $P(V_2)$. Les événements R_1 , V_1 et B_1 forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(V_2) &= P(R_1 \cap V_2) + P(V_1 \cap V_2) + P(B_1 \cap V_2) = P(R_1)P_{R_1}(V_2) + P(V_1)P_{V_1}(V_2) + P(B_1)P_{B_1}(V_2) \\ &= \frac{2}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

La probabilité que la deuxième boule tirée soit verte est $\frac{1}{3}$.

3. Il me faut cette fois étudier les probabilités de R_1 , V_1 et B_1 , sachant V_2 .

D'après la définition des probabilités conditionnelles, $P_{V_2}(V_1) = \frac{P(V_1 \cap V_2)}{P(V_2)}$.

Or d'après la question 1., $P(V_1 \cap V_2) = \frac{1}{12}$ et d'après la question 2., $P(V_2) = \frac{1}{3}$.

Alors

$$P_{V_2}(V_1) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{12} \times \frac{3}{1} = \frac{1}{4}.$$

En raisonnant de même pour les boules rouges et bleues, j'obtiens

$$P_{V_2}(R_1) = \frac{P(R_1 \cap V_2)}{P(V_2)} = \frac{\frac{2}{9} \times \frac{3}{8}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{12} \times \frac{3}{1} = \frac{1}{4}$$

et

$$P_{V_2}(B_1) = \frac{P(B_1 \cap V_2)}{P(V_2)} = \frac{\frac{4}{9} \times \frac{3}{8}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6} \times \frac{3}{1} = \frac{1}{2}.$$

Il y a donc plus de chances pour que la première boule tirée ait été bleue.

Exercice 4 –

1. À la lecture de l'énoncé, je remarque que

$$P(S) = 0.6, \quad P(\bar{S}) = 1 - 0.6 = 0.4, \quad P_S(A) = 0.2, \quad P_S(B) = 0.45,$$

$$P_S(C) = 1 - 0.2 - 0.45 = 0.35, \quad P_{\bar{S}}(B) = 0.55 \quad \text{et} \quad P(A) = 0.18.$$

2. Je cherche ici à calculer $P(B)$. D'après la formule des probabilités totales, comme $\{S, \bar{S}\}$ forme un système complet d'événements, alors

$$P(B) = P(S \cap B) + P(\bar{S} \cap B) = P(S) \times P_S(B) + P(\bar{S}) \times P_{\bar{S}}(B)$$

$$= 0.6 \times 0.45 + 0.4 \times 0.55 = 0.27 + 0.22 = 0.49.$$

Le gestionnaire peut donc effectivement affirmer que près de la moitié des résidents choisissent la formule *Simple*.

3. a) D'après la formule des probabilités totales, comme $\{S, \bar{S}\}$ forme un système complet d'événements, alors

$$P(A) = P(S \cap A) + P(\bar{S} \cap A) = P(S) \times P_S(A) + P(\bar{S}) \times P_{\bar{S}}(A)$$

i.e. $0.18 = 0.6 \times 0.2 + 0.4 \times x = 0.12 + 0.4x.$

Ainsi j'ai bien montré que

$$0.18 = 0.12 + 0.4x.$$

b) Pour trouver la valeur de $P_{\bar{S}}(A)$, il me suffit de résoudre l'équation obtenue à la question précédente :

$$0.18 = 0.12 + 0.4x \iff 0.4x = 0.18 - 0.12 = 0.06 \iff x = \frac{0.06}{0.4} = \frac{6}{40} = 0.15.$$

Donc $P_{\bar{S}}(A) = 0.15$.

4. Je cherche ici à calculer $P_A(\bar{S})$. D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_A(\bar{S}) = \frac{P(A \cap \bar{S})}{P(A)} = \frac{P(\bar{S}) \times P_{\bar{S}}(A)}{P(A)} = \frac{0.4 \times 0.15}{0.18} = \frac{0.06}{0.18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \approx 0.33.$$

La probabilité qu'un résident ait loué un deux-pièces sachant qu'il n'a souscrit aucune formule d'entretien est $\frac{1}{3}$.