DEVOIR MAISON 2

Exercice 1 – On considère le polynôme $P(x)$ défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$P(x) = x^3 - 21x - 20.$$

1. Calculer $P(-1)$.
2. En déduire qu'il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x+1)Q(x)$ et le déterminer.
3. Résoudre l'inéquation $P(x) \geqslant 0$.
4. En déduire le domaine de définition de la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 21x - 20}.$$

5. Donner le domaine de définition de la fonction g définie par

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 5x - 14} + \sqrt{x^3 - 21x - 20}.$$

Exercice 2 – Le nombre d'arbres d'une forêt, **en milliers d'unités**, est modélisé par une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où u_n désigne le nombre d'arbres, **en milliers**, au cours de l'année $2020 + n$. En 2020, la forêt possède 50000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5% des arbres existants et de replanter 3000 arbres.

1. Montrer que la situation peut être modélisée par $u_0 = 50$ et pour tout entier naturel n, par la relation

$$u_{n+1} = 0.95u_n + 3.$$

2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par

$$v_n = 60 - u_n.$$

   a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 0.95.
   b) Calculer v_0.
   c) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
   d) En déduire que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 60 - 10 \times (0.95)^n.$$

3. Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2030.
   On donnera une valeur approchée arrondie au millier.
   Indication numérique : $0.95^{10} \approx 0.60$.

Exercice 3 – Une urne contient deux boules rouges, trois boules vertes et quatre boules bleues. On tire successivement et sans remise deux boules dans cette urne.

1. Calculer la probabilité que les deux boules tirées soient vertes.
2. Calculer la probabilité que la deuxième boule tirée soit verte.
3. On constate que la deuxième boule tirée est verte. En vous appuyant sur des calculs de probabilité, quelle était *a priori* la couleur de la première boule tirée ?

Exercice 4 – Une résidence de vacances propose deux types d'appartements (studio et deux-pièces) à louer à la semaine. L'appartement doit être restitué parfaitement propre en fin de séjour. Le locataire peut décider de le nettoyer lui-même ou peut choisir l'une des deux formules d'entretien suivantes : la formule *Simple* (nettoyage de l'appartement en fin de séjour par le personnel d'entretien) ou la formule *Confort* (nettoyage quotidien du logement durant la semaine et nettoyage complet en fin de séjour par le personnel d'entretien).

Le gestionnaire a constaté que :

- 60% des locataires optent pour un studio et parmi ceux-ci 20% ne souscrivent aucune formule d'entretien.
- La formule *Simple* a beaucoup de succès : elle est choisie par 45% des locataires de studio et par 55% des locataires de deux-pièces.
- 18% des locataires ne souscrivent aucune formule.

On rencontre un résident au hasard. On note :

- S l'événement "le résident a loué un studio",
- A l'événement "le résident n'a souscrit aucune formule d'entretien",
- B l'événement "le résident a souscrit la formule *Simple*",
- C l'événement "le résident a souscrit la formule *Confort*".

1. Donner les valeurs des probabilités suivantes :

$$P(S), \qquad P(\overline{S}), \qquad P_S(A), \qquad P_S(B), \qquad P_S(C), \qquad P_{\overline{S}}(B) \quad \text{et} \quad P(A).$$

2. Le gestionnaire affirme que près de la moitié des résidents choisissent la formule *Simple*. Justifier cette affirmation par le calcul.
3. On pose $x = P_{\overline{S}}(A)$.
   a) À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que

$$0.18 = 0.12 + 0.4x.$$

   b) En déduire la valeur de $P_{\overline{S}}(A)$.
4. Calculer la probabilité que le résident ait loué un deux-pièces sachant qu'il n'a souscrit aucune formule d'entretien.