

DEVOIR SURVEILLÉ 1

Exercice 1 -

1. $A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{12}{12} - \frac{6}{12} + \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$
2. $B = \frac{\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\right) \times 6}{\frac{2}{15} - \frac{4}{9}} = \frac{\left(\frac{10}{15} - \frac{12}{15}\right) \times 6}{\frac{6}{45} - \frac{20}{45}} = \frac{-\frac{2}{15} \times 6}{-\frac{14}{45}} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{14}{45}} = \frac{4}{5} \times \frac{45}{14} = \frac{2 \times 2 \times 9 \times 5}{5 \times 2 \times 7} = \frac{18}{7}$
3. $C = \left(1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \times 3\right) \div \frac{2}{5} = \left(1 - \left(\frac{3}{6} - \frac{2}{6}\right) \times 3\right) \div \frac{2}{5} = \left(1 - \frac{1}{6} \times 3\right) \div \frac{2}{5} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{4}$
4. $D = \left(1 - \frac{1}{8}\right) \times \left(\frac{2}{7} + 1\right)^2 \div \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{8} \times \left(\frac{9}{7}\right)^2 \div \frac{13}{12} = \frac{7}{8} \times \frac{81}{49} \times \frac{12}{13} = \frac{7 \times 9 \times 9 \times 4 \times 3}{4 \times 2 \times 7 \times 7 \times 13}$
 $= \frac{9 \times 9 \times 3}{2 \times 7 \times 13} = \frac{243}{182}$

Exercice 2 -

1. $A = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
2. $B = \sqrt{\frac{81}{25}} - \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{25}} - \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{5} - \frac{9}{25} = \frac{45}{25} - \frac{9}{25} = \frac{36}{25}$
3. $C = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$
4. $D = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1$

Exercice 3 -

1. $A(x) = 2x(x+1) - (12x-11)^2 = 2x^2 + 2x - (144x^2 - 264x + 121)$
 $= 2x^2 + 2x - 144x^2 + 264x - 121 = -142x^2 + 266x - 121$
2. $B(x) = (3-x)(4-2x) + (-5x)^2 = 12 - 6x - 4x + 2x^2 + 25x^2 = 27x^2 - 10x + 12$
3. $C(x) = (1-3x)(x+2)(2x+5) = (x+2-3x^2-6x)(2x+5) = (-3x^2-5x+2)(2x+5)$
 $= -6x^3 - 15x^2 - 10x^2 - 25x + 4x + 10 = -6x^3 - 25x^2 - 21x + 10$
4. $D(x) = 2(x-2)(x-3) = 2(x^2 - 3x - 2x + 6) = 2(x^2 - 5x + 6) = 2x^2 - 10x + 12$

Exercice 4 -

1. $A(x) = (5x+1)(3x-2) - (3x-2) = (3x-2)(5x+1-1) = 5x(3x-2)$
2. $B(x) = (2x+5)^2 + (2x+5)(x-4) = (2x+5)(2x+5+x-4) = (2x+5)(3x+1)$
3. $C(x) = 9x^2 - 100 = (3x)^2 - 10^2 = (3x-10)(3x+10)$
4. $D(x) = (x+1)^2(x-1) - 16(x-1) = (x-1)((x+1)^2 - 16) = (x-1)((x+1)^2 - 4^2)$
 $= (x-1)(x+1-4)(x+1+4) = (x-1)(x-3)(x+5)$

Exercice 5 –

$$1. 2x - 3 = 0 \iff 2x = 3 \iff x = \frac{3}{2} \quad \text{donc } \mathcal{S} = \left\{ \frac{3}{2} \right\}.$$

$$2. -x + 7 = 0 \iff x = 7 \quad \text{donc } \mathcal{S} = \{7\}.$$

$$3. x + 3 = 2x - 1 \iff 3 + 1 = 2x - x \iff 4 = x \iff x = 4 \quad \text{donc } \mathcal{S} = \{4\}.$$

$$4. \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \iff \frac{1}{3}x = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9-8}{12} = \frac{1}{12} \iff x = 3 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{4} \quad \text{donc } \mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{4} \right\}.$$

$$5. \text{ Je calcule le discriminant : } \Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 21 = 100 - 84 = 16 > 0.$$

Le polynôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-10) - \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{10 - 4}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10 + 4}{2} = 7.$$

Donc $\mathcal{S} = \{3, 7\}$.

$$6. \text{ Je calcule le discriminant : } \Delta = \left(\frac{6}{7}\right)^2 - 4 \times 3 \times \frac{3}{49} = \frac{36}{49} - \frac{36}{49} = 0.$$

Le polynôme admet une unique racine :

$$x_0 = -\frac{\frac{6}{7}}{2 \times 3} = -\frac{1}{7}.$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{1}{7} \right\}$.

$$7. (x-1)(x+1) = 5x-7 \iff x^2 - 1 = 5x - 7 \iff x^2 - 5x + 6 = 0$$

Je calcule le discriminant de ce polynôme : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$.

Le polynôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

Donc $\mathcal{S} = \{2, 3\}$.

$$8. \text{ Je calcule le discriminant : } \Delta = (-3)^2 - 4 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 9 - 8 = 1 > 0.$$

Le polynôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2\sqrt{2}} = \frac{3-1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3+1}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} \right\}$.

Exercice 6 –

$$1. -2x + 3 > 0 \iff 3 > 2x \iff 2x < 3 \iff x < \frac{3}{2} \quad \text{donc } \mathcal{S} = \left] -\infty, \frac{3}{2} \right[.$$

$$2. 5x - 6 \leq 0 \iff 5x \leq 6 \iff x \leq \frac{6}{5} \quad \text{donc } \mathcal{S} = \left] -\infty, \frac{6}{5} \right].$$

$$3. 2x - 1 < \frac{1}{2} \iff 2x < \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \iff x < \frac{3}{4} \quad \text{donc } \mathcal{S} = \left] -\infty, \frac{3}{4} \right[.$$

$$4. \frac{1}{3}x + 1 \geq \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \iff \frac{4}{3} \geq \frac{1}{3}x \iff 4 \geq x \iff x \leq 4 \quad \text{donc } \mathcal{S} = \left] -\infty, 4 \right].$$

5. Je commence par étudier le signe de $x^2 + 2x + 1$.

Le discriminant vaut $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4 - 4 = 0$.

Le polynôme admet une racine $x_0 = -\frac{2}{2 \times 1} = -1$. J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x^2 + 2x + 1$	$+$	0	$+$

Donc $\mathcal{S} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$.

6. Je commence par étudier le signe de $x^2 + x + 1$.

Le discriminant vaut $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$.

Le polynôme n'admet pas de racine. J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$x^2 + x + 1$	$+$	$+$

Donc $\mathcal{S} = \emptyset$.

7. Je commence par étudier le signe de $x^2 - 5x + 6$.

Le discriminant vaut $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$.

Le polynôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$x^2 - 5x + 6$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc $\mathcal{S} = [2, 3]$.

8. $(x-1)(x-2) \leq 2x-4 \iff x^2-3x+2 \leq 2x-4 \iff x^2-5x+6 \leq 0$.

J'ai déjà résolu cette inéquation à la question précédente. J'en déduis que $\mathcal{S} = [2, 3]$.

Exercice 7 –

1. Comme x est non nul, je peux multiplier chaque membre de l'égalité par x^2 . J'obtiens alors

$$x^2 + \frac{16}{x^2} = 8 \iff x^4 + 16 = 8x^2 \iff x^4 - 8x^2 + 16 = 0.$$

Je pose $X = x^2$. Alors l'équation devient une équation de degré 2 en X : $X^2 - 8X + 16 = 0$.

Je calcule ensuite le discriminant : $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 16 = 64 - 64 = 0$.

L'équation admet donc une unique solution : $X_0 = -\frac{-8}{2} = 4$.

J'en déduis donc que les solutions de l'équation de départ vérifient $x^2 = 4$,

i.e. $x = 2$ ou $x = -2$. Ainsi $\mathcal{S} = \{-2, 2\}$.

2. Grâce à la résolution précédente, je peux obtenir une factorisation du polynôme de degré 2 :

$$X^2 - 8X + 16 = (X - 4)^2 = (x^2 - 4)^2.$$

Et comme un carré est toujours positif, $(x^2 - 4)^2 \geq 0$. Alors comme x^2 aussi est positif,

$$\frac{(x^2 - 4)^2}{x^2} \geq 0 \iff \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^2} \geq 0 \iff x^2 - 8 + \frac{16}{x^2} \geq 0 \iff x^2 + \frac{16}{x^2} \geq 8.$$

Donc pour tout $x \in]0, +\infty[$, j'ai bien montré que $x^2 + \frac{16}{x^2} \geq 8$.

Exercice 8 -

1. Je calcule $P(1)$ en remplaçant x par 1 dans l'expression de $P(x)$: $P(-1) = -3 - 7 + 7 + 3 = 0$. Comme $P(1) = 0$, 1 est une racine du polynôme $P(x)$ et $P(x)$ est divisible par $x - (-1) = x + 1$. J'opère donc la division euclidienne de $P(x)$ par $x + 1$:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 & - & 7x^2 & - & 7x & + & 3 & x+1 \\ - & (3x^3 & + & 3x^2) & & & & \hline & & - & 10x^2 & - & 7x & + & 3 \\ & & - & (- & 10x^2 & - & 10x) & \\ \hline & & & & & 3x & + & 3 \\ & & & & & - & (3x & + & 3) \\ \hline & & & & & & & 0 \end{array}$$

Finalement $P(x) = (x + 1)(3x^2 - 10x + 3)$.

2. Il me reste à traiter le polynôme de degré 2.

Son discriminant vaut $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 100 - 36 = 64 > 0$. Il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-10) - \sqrt{64}}{2 \times 3} = \frac{10 - 8}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10 + 8}{6} = 3.$$

Donc l'équation $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$ admet trois solutions : $\mathcal{S} = \left\{-1, \frac{1}{3}, 3\right\}$.

3. J'établis le tableau de signe du polynôme $P(x)$:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$x + 1$		-	0	+		+		+	
$3x^2 - 10x + 3$		+		+	0	-	0	+	
$P(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Et donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x) \geq 0$ est donné par

$$\mathcal{S} = \left[-1, \frac{1}{3}\right] \cup [3, +\infty[.$$

Exercice 9 –

1. Lorsque $m = 4$, $x^2 + 4x + 2(m-1) = x^2 + 4x + 2 \times 3 = x^2 + 4x + 6$. L'équation à résoudre devient donc $x^2 + 4x + 6 = 0$. Je calcule le discriminant : $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 6 = 16 - 24 = -8 < 0$. Comme le discriminant est négatif, l'équation n'admet pas de solution réelle lorsque $m = 4$.
2. a) Je calcule le discriminant associé à l'équation $x^2 + 4x + 2(m-1) = 0$ en fonction de m :

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 2(m-1) = 16 - 8(m-1) = 16 - 8m + 8 = 24 - 8m.$$

- b) Je sais que cette équation admet une unique solution si et seulement si son discriminant est nul. J'obtiens alors que

$$\Delta = 0 \iff 24 - 8m = 0 \iff 24 = 8m \iff m = \frac{24}{8} = 3.$$

- c) Lorsque $m = 3$, l'équation devient $x^2 + 4x + 4 = 0$. Son discriminant est nul et l'unique solution est donnée par

$$x_0 = -\frac{4}{2 \times 1} = -2.$$

3. L'équation admet deux solutions distinctes si et seulement si

$$\Delta > 0 \iff 24 - 8m > 0 \iff 8m < 24 \iff m < 3.$$

De la même façon, l'équation n'admet aucune solution réelle lorsque

$$\Delta < 0 \iff m > 3.$$