

DEVOIR SURVEILLÉ 1

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.

Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez. Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement.

Ce sujet comporte 2 pages et est constitué de 9 exercices. Bon courage!

Exercice 1 – Donner l'écriture des nombres suivants sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible.

$$1. A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$2. B = \frac{\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\right) \times 6}{\frac{2}{15} - \frac{4}{9}}$$

$$3. C = \left(1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \times 3\right) \div \frac{2}{5}$$

$$4. D = \left(1 - \frac{1}{8}\right) \times \left(\frac{2}{7} + 1\right)^2 \div \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right)$$

Exercice 2 – Simplifier l'écriture des nombres suivants.

$$1. A = \sqrt{32}$$

$$2. B = \sqrt{\frac{81}{25} - \frac{3}{5}} \times \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}$$

$$3. C = \sqrt{16+9}$$

$$4. D = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$$

Exercice 3 – Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes.

$$1. A(x) = 2x(x+1) - (12x-11)^2$$

$$2. B(x) = (3-x)(4-2x) + (-5x)^2$$

$$3. C(x) = (1-3x)(x+2)(2x+5)$$

$$4. D(x) = 2(x-2)(x-3)$$

Exercice 4 – Factoriser **au maximum** les expressions suivantes.

$$1. A(x) = (5x+1)(3x-2) - (3x-2)$$

$$2. B(x) = (2x+5)^2 + (2x+5)(x-4)$$

$$3. C(x) = 9x^2 - 100$$

$$4. D(x) = (x+1)^2(x-1) - 16(x-1)$$

Exercice 5 – Résoudre les équations suivantes.

$$1. 2x - 3 = 0$$

$$2. -x + 7 = 0$$

$$3. x + 3 = 2x - 1$$

$$4. \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$$

$$5. x^2 - 10x + 21 = 0$$

$$6. 3x^2 + \frac{6}{7}x + \frac{3}{49} = 0$$

$$7. (x-1)(x+1) = 5x - 7$$

$$8. \sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$$

Exercice 6 – Résoudre les inéquations suivantes.

1. $-2x + 3 > 0$

2. $5x - 6 \leq 0$

3. $2x - 1 < \frac{1}{2}$

4. $\frac{1}{3}x + 1 \geq \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

5. $x^2 + 2x + 1 > 0$

6. $x^2 + x + 1 < 0$

7. $x^2 - 5x + 6 \leq 0$

8. $(x - 1)(x - 2) \leq 2x - 4$

Exercice 7 –

1. Résoudre l'équation $x^2 + \frac{16}{x^2} = 8$ pour un réel x non nul.

2. Montrer que $x^2 + \frac{16}{x^2} \geq 8$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

Exercice 8 – Soit le polynôme $P(x) = 3x^3 - 7x^2 - 7x + 3$.

1. Montrer que le polynôme $P(x)$ peut se factoriser sous la forme $P(x) = (x + 1)Q(x)$, où $Q(x)$ est un polynôme de degré 2 à déterminer.

2. Déterminer alors les solutions de l'équation $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$.

3. Résoudre l'inéquation $P(x) \geq 0$.

Exercice 9 – Soit m un nombre réel. On considère l'équation $x^2 + 4x + 2(m - 1) = 0$.

1. Cette équation admet-elle une solution lorsque $m = 4$?

2. a) Calculer, en fonction de m , le discriminant de cette équation.

b) Déterminer m pour que cette équation admette une unique solution.

c) Déterminer la valeur de cette solution unique.

3. Préciser les cas, en fonction de m , où cette équation admet deux solutions distinctes et où cette équation n'admet aucune solution.