# DEVOIR MAISON 1

**Exercice 1 –**

1. $A = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} - \frac{6}{12} + \frac{9}{12} = \frac{11}{12}$
2. $B = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \left(2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{7}{4} = \frac{2}{3} - \frac{7}{12} = \frac{8}{12} - \frac{7}{12} = \frac{1}{12}$
3. $C = \dfrac{1 + \frac{5}{6}}{\frac{1}{5} - 2 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)} = \dfrac{\frac{11}{6}}{\frac{1}{5} - 2 \times \frac{7}{12}} = \dfrac{\frac{11}{6}}{\frac{6}{30} - \frac{35}{30}} = \frac{11}{6} \times \left(-\frac{30}{29}\right) = -\frac{55}{29}$
4. $D = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \div \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{20} \div \frac{9}{4} = \frac{1}{120} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{270}$

**Exercice 2 –**

1. $2x - 3 = 4 \iff 2x = 7 \iff x = \frac{7}{2}$ donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{7}{2}\right\}$.
2. $x - \frac{1}{2} = 2x - 1 \iff \frac{1}{2} = x \iff x = \frac{1}{2}$ donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
3. $2x - 4 < 3x + 5 \iff -9 < x \iff x > -9$ donc $\mathcal{S} = ]-9, +\infty[$.
4. Je calcule le discriminant : $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 1 \times 27 = 144 - 108 = 36 > 0$.
   Le polynôme admet donc deux racines :
   $$x_1 = \frac{-(-12) - \sqrt{36}}{2 \times 1} = \frac{12 - 6}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{12 + 6}{2} = 9.$$
   Donc $\mathcal{S} = \{3, 9\}$.
5. Je calcule le discriminant : $\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times 10 = 9 + 40 = 49 > 0$.
   Le polynôme admet donc deux racines :
   $$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{49}}{2 \times (-1)} = \frac{-3 - 7}{-2} = 5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3 + 7}{-2} = -2.$$
   J'en déduis le tableau de signe suivant :

   | $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $5$ | | $+\infty$ |
   |---|---|---|---|---|---|---|---|
   | $-x^2+3x+10$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

   Ainsi $\mathcal{S} = ]-\infty, -2[ \cup ]5, +\infty[$.
6. $x(x-2) = -1 \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1$.
   J'ai reconnu l'identité remarquable. Ainsi $\mathcal{S} = \{1\}$.
7. $\frac{2}{x+3} = \frac{1}{x+1} \iff \frac{2(x+1) - (x+3)}{(x+1)(x+3)} = 0 \iff \frac{2x + 2 - x - 3}{(x+1)(x+3)} = 0 \iff \frac{x - 1}{(x+1)(x+3)} = 0$
   Or $(x+1)(x+3) = 0 \iff x + 1 = 0$ ou $x + 3 = 0 \iff x = -1$ ou $x = -3$
   donc les valeurs interdites sont $x = -1$ et $x = -3$. Par ailleurs, $x - 1 = 0 \iff x = 1$.
   Cette valeur ne fait pas partie des valeurs interdites donc $\mathcal{S} = \{1\}$.

8. $x-3=0 \iff x=3$ donc il y a une valeur interdite : $x=3$.
Par ailleurs le discriminant de $x^2-5x+6$ vaut $\Delta=(-5)^2-4\times1\times6=25-24=1>0$.
Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1=\frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times1}=\frac{5-1}{2}=2 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{5+1}{2}=3.$$

Comme 3 est valeur interdite, finalement $\mathcal{S}=\{2\}$.

9. $\dfrac{x}{x+1}\leqslant\dfrac{3}{2x-3} \iff \dfrac{x}{x+1}-\dfrac{3}{2x-3}\leqslant 0 \iff \dfrac{x(2x-3)-3(x+1)}{(x+1)(2x-3)}\leqslant 0 \iff \dfrac{2x^2-6x-3}{(x+1)(2x-3)}\leqslant 0$
Je calcule le discriminant de $2x^2-6x-3$ : $\Delta=(-6)^2-4\times2\times(-3)=36+24=60>0$.
Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1=\frac{-(-6)-\sqrt{60}}{2\times2}=\frac{6-2\sqrt{15}}{4}=\frac{3-\sqrt{15}}{2}\approx-0.4 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{3+\sqrt{15}}{2}\approx3.4,$$

car $\sqrt{60}=2\sqrt{15}$ et $\sqrt{15}\approx3.9$. J'en déduis le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{3-\sqrt{15}}{2}$ | | $\frac{3}{2}$ | | $\frac{3+\sqrt{15}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x^2-6x-3$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $2x-3$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\frac{2x^2-6x-3}{(x+1)(2x-3)}$ | | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Finalement $\mathcal{S}=\left]-1,\dfrac{3-\sqrt{15}}{2}\right]\cup\left]\dfrac{3}{2},\dfrac{3+\sqrt{15}}{2}\right]$.

10. Je cherche une racine évidente du polynôme $P(x)=x^3-9x^2+11x+21$.
Et $P(-1)=(-1)^3-9\times(-1)^2+11\times(-1)+21=-1-9-11+21=0$.
Donc $-1$ est une racine de $P(x)$ et $P(x)$ est divisible par $x-(-1)=x+1$.
J'opère donc la division euclidienne de $x^3-9x^2+11x+21$ par $x+1$.

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & x^3 & - & 9x^2 & + & 11x & + & 21 & x+1 \\
- & \big(x^3 & + & x^2\big) & & & & & x^2-10x+21 \\ \hline
 & & - & 10x^2 & + & 11x & + & 21 & \\
 & - & \big(- & 10x^2 & - & 10x\big) & & & \\ \hline
 & & & & & 21x & + & 21 & \\
 & & & & - & \big(21x & + & 21\big) & \\ \hline
 & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Finalement $P(x)=(x+1)\big(x^2-10x+21\big)$. Puis je calcule le discriminant de $x^2-10x+21$ :
$\Delta=(-10)^2-4\times1\times21=100-84=16>0$. Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1=\frac{-(-10)-\sqrt{16}}{2\times1}=\frac{10-4}{2}=3 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{10+4}{2}=7.$$

En conclusion, les solutions de l'équation de degré 3 sont données par

$$\mathcal{S}=\big\{-1,3,7\big\}.$$

**Exercice 3 –**

1. a) Je calcule l'image de $-\dfrac{3}{2}$ :

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^3}{3} - \frac{9}{4} \times \left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{9}{4} = \frac{-\frac{27}{8}}{3} + \frac{27}{8} + \frac{9}{4} = -\frac{9}{8} + \frac{27}{8} + \frac{18}{8} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}.$$

b) Graphiquement, j'établis le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{3}{2}$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | ↗ | $\frac{9}{2}$ | ↘ | $0$ | ↗ | |

c) Je développe la forme factorisée donnée par l'énoncé pour retrouver $f(x)$ :

$$\frac{(x+3)(2x-3)^2}{12} = \frac{(x+3)\left(4x^2-12x+9\right)}{12} = \frac{4x^3-27x+27}{12} = \frac{x^3}{3} - \frac{9}{4}x + \frac{9}{4} = f(x).$$

J'ai bien montré que pour tout réel $x$, $\quad f(x) = \dfrac{(x+3)(2x-3)^2}{12}$.

d) Comme $12 > 0$, il me suffit d'étudier le signe de $(x+3)(2x-3)^2$.
Or un carré est toujours positif donc $(2x-3)^2 \geqslant 0$. Et $x+3 \geqslant 0 \iff x \geqslant -3$.
J'en déduis le tableau de signe suivant pour $f(x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $(2x-3)^2$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |

2. Pour résoudre l'équation $g(x) = 0$, je commence par calculer le discriminant :
$\Delta = 1^2 - 4 \times \dfrac{2}{3} \times (-3) = 1 + 8 = 9 > 0$. Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2 \times \frac{2}{3}} = \frac{-1-3}{\frac{4}{3}} = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+3}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{-3, \dfrac{3}{2}\right\}$.

3. Pour étudier la position des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, il faut étudier le signe de $f(x) - g(x)$.
D'après la question précédente, $\quad g(x) = \dfrac{2}{3}(x+3)\left(x - \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{(x+3)(2x-3)}{3}$. Ainsi,

$$f(x) - g(x) = \frac{(x+3)(2x-3)}{3} \times \left(\frac{2x-3}{4} - 1\right) = \frac{(x+3)(2x-3)}{3} \times \frac{2x-7}{4} = \frac{(x+3)(2x-3)(2x-7)}{12}.$$

J'en déduis le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $\frac{3}{2}$ | | $\frac{7}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $2x-3$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $2x-7$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)-g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Finalement

- sur les intervalles $]-\infty,-3]$ et $\left[\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right]$, $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$,
- sur les intervalles $\left[-3,\frac{3}{2}\right]$ et $\left[\frac{7}{2},+\infty\right[$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.