

DEVOIR MAISON 1

Exercice 1 -

$$1. A = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} - \frac{6}{12} + \frac{9}{12} = \frac{11}{12}$$

$$2. B = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \left(2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{7}{4} = \frac{2}{3} - \frac{7}{12} = \frac{8}{12} - \frac{7}{12} = \frac{1}{12}$$

$$3. C = \frac{1 + \frac{5}{6}}{\frac{1}{5} - 2 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{11}{6}}{\frac{1}{5} - 2 \times \frac{7}{12}} = \frac{\frac{11}{6}}{\frac{6}{30} - \frac{35}{30}} = \frac{11}{6} \times \left(-\frac{30}{29}\right) = -\frac{55}{29}$$

$$4. D = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \div \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{20} \div \frac{9}{4} = \frac{1}{120} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{270}$$

Exercice 2 -

$$1. 2x - 3 = 4 \iff 2x = 7 \iff x = \frac{7}{2} \quad \text{donc } \mathcal{S} = \left\{\frac{7}{2}\right\}.$$

$$2. x - \frac{1}{2} = 2x - 1 \iff \frac{1}{2} = x \iff x = \frac{1}{2} \quad \text{donc } \mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

$$3. 2x - 4 < 3x + 5 \iff -9 < x \iff x > -9 \quad \text{donc } \mathcal{S} =]-9, +\infty[.$$

$$4. \text{ Je calcule le discriminant : } \Delta = (-12)^2 - 4 \times 1 \times 27 = 144 - 108 = 36 > 0.$$

Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-12) - \sqrt{36}}{2 \times 1} = \frac{12 - 6}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{12 + 6}{2} = 9.$$

Donc $\mathcal{S} = \{3, 9\}$.

$$5. \text{ Je calcule le discriminant : } \Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times 10 = 9 + 40 = 49 > 0.$$

Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{49}}{2 \times (-1)} = \frac{-3 - 7}{-2} = 5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3 + 7}{-2} = -2.$$

J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$
$-x^2 + 3x + 10$	-	0	+	0

Ainsi $\mathcal{S} =]-\infty, -2[\cup]5, +\infty[$.

$$6. x(x-2) = -1 \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x-1 = 0 \iff x = 1.$$

J'ai reconnu l'identité remarquable. Ainsi $\mathcal{S} = \{1\}$.

$$7. \frac{2}{x+3} = \frac{1}{x+1} \iff \frac{2(x+1) - (x+3)}{(x+1)(x+3)} = 0 \iff \frac{2x+2-x-3}{(x+1)(x+3)} = 0 \iff \frac{x-1}{(x+1)(x+3)} = 0$$

$$\text{Or } (x+1)(x+3) = 0 \iff x+1 = 0 \text{ ou } x+3 = 0 \iff x = -1 \text{ ou } x = -3$$

donc les valeurs interdites sont $x = -1$ et $x = -3$. Par ailleurs, $x-1 = 0 \iff x = 1$.

Cette valeur ne fait pas partie des valeurs interdites donc $\mathcal{S} = \{1\}$.

8. $x - 3 = 0 \iff x = 3$ donc il y a une valeur interdite : $x = 3$.

Par ailleurs le discriminant de $x^2 - 5x + 6$ vaut $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$.

Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{5 - 1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5 + 1}{2} = 3.$$

Comme 3 est valeur interdite, finalement $\mathcal{S} = \{2\}$.

9. $\frac{x}{x+1} \leq \frac{3}{2x-3} \iff \frac{x}{x+1} - \frac{3}{2x-3} \leq 0 \iff \frac{x(2x-3) - 3(x+1)}{(x+1)(2x-3)} \leq 0 \iff \frac{2x^2 - 6x - 3}{(x+1)(2x-3)} \leq 0$

Je calcule le discriminant de $2x^2 - 6x - 3$: $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 36 + 24 = 60 > 0$.

Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-6) - \sqrt{60}}{2 \times 2} = \frac{6 - 2\sqrt{15}}{4} = \frac{3 - \sqrt{15}}{2} \approx -0.4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{15}}{2} \approx 3.4,$$

car $\sqrt{60} = 2\sqrt{15}$ et $\sqrt{15} \approx 3.9$. J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{3 - \sqrt{15}}{2}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{3 + \sqrt{15}}{2}$		$+\infty$
$2x^2 - 6x - 3$		+		+	0	-		-	0	+	
$x + 1$		-	0	+		+		+		+	
$2x - 3$		-		-		-	0	+		+	
$\frac{2x^2 - 6x - 3}{(x+1)(2x-3)}$		+		-	0	+		-	0	+	

Finalement $\mathcal{S} = \left] -1, \frac{3 - \sqrt{15}}{2} \right] \cup \left] \frac{3}{2}, \frac{3 + \sqrt{15}}{2} \right]$.

10. Je cherche une racine évidente du polynôme $P(x) = x^3 - 9x^2 + 11x + 21$.

Et $P(-1) = (-1)^3 - 9 \times (-1)^2 + 11 \times (-1) + 21 = -1 - 9 - 11 + 21 = 0$.

Donc -1 est une racine de $P(x)$ et $P(x)$ est divisible par $x - (-1) = x + 1$.

J'opère donc la division euclidienne de $x^3 - 9x^2 + 11x + 21$ par $x + 1$.

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 & - & 9x^2 & + & 11x & + & 21 & & x+1 \\
 - & (x^3 & + & x^2) & & & & & \hline
 & & - & 10x^2 & + & 11x & + & 21 & \\
 - & & (- & 10x^2 & - & 10x) & & & \hline
 & & & & & 21x & + & 21 & \\
 & & & & & - & (21x & + & 21) & \\
 & & & & & & & & & 0 & \\
 \hline
 \end{array}$$

Finalement $P(x) = (x + 1)(x^2 - 10x + 21)$. Puis je calcule le discriminant de $x^2 - 10x + 21$: $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 21 = 100 - 84 = 16 > 0$. Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-10) - \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{10 - 4}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10 + 4}{2} = 7.$$

En conclusion, les solutions de l'équation de degré 3 sont données par

$$\mathcal{S} = \{-1, 3, 7\}.$$

Exercice 3 –

1. a) Je calcule l'image de $-\frac{3}{2}$:

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^3}{3} - \frac{9}{4} \times \left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{9}{4} = \frac{-\frac{27}{8}}{3} + \frac{27}{8} + \frac{9}{4} = -\frac{9}{8} + \frac{27}{8} + \frac{18}{8} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}.$$

- b) Graphiquement, j'établis le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
f		$\frac{9}{2}$	0	

- c) Je développe la forme factorisée donnée par l'énoncé pour retrouver $f(x)$:

$$\frac{(x+3)(2x-3)^2}{12} = \frac{(x+3)(4x^2-12x+9)}{12} = \frac{4x^3-27x+27}{12} = \frac{x^3}{3} - \frac{9}{4}x + \frac{9}{4} = f(x).$$

J'ai bien montré que pour tout réel x , $f(x) = \frac{(x+3)(2x-3)^2}{12}$.

- d) Comme $12 > 0$, il me suffit d'étudier le signe de $(x+3)(2x-3)^2$.
Or un carré est toujours positif donc $(2x-3)^2 \geq 0$. Et $x+3 \geq 0 \iff x \geq -3$.
J'en déduis le tableau de signe suivant pour $f(x)$:

x	$-\infty$	-3	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$x+3$	-	0	+	+
$(2x-3)^2$	+		0	+
$f(x)$	-	0	+	+

2. Pour résoudre l'équation $g(x) = 0$, je commence par calculer le discriminant :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times \frac{2}{3} \times (-3) = 1 + 8 = 9 > 0. \quad \text{Le polynôme admet donc deux racines :}$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \times \frac{2}{3}} = \frac{-1 - 3}{\frac{4}{3}} = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + 3}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \left\{-3, \frac{3}{2}\right\}.$$

3. Pour étudier la position des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g , il faut étudier le signe de $f(x) - g(x)$.

$$\text{D'après la question précédente, } g(x) = \frac{2}{3}(x+3)\left(x - \frac{3}{2}\right) = \frac{(x+3)(2x-3)}{3}. \quad \text{Ainsi,}$$

$$f(x) - g(x) = \frac{(x+3)(2x-3)}{3} \times \left(\frac{2x-3}{4} - 1\right) = \frac{(x+3)(2x-3)}{3} \times \frac{2x-7}{4} = \frac{(x+3)(2x-3)(2x-7)}{12}.$$

J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-3		$\frac{3}{2}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$x+3$		-	0	+		+		+	
$2x-3$		-		-	0	+		+	
$2x-7$		-		-		-	0	+	
$f(x)-g(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Finalemment

- sur les intervalles $] -\infty, -3]$ et $[\frac{3}{2}, \frac{7}{2}]$, \mathcal{C}_g est au-dessus de \mathcal{C}_f ,
- sur les intervalles $[-3, \frac{3}{2}]$ et $[\frac{7}{2}, +\infty[$, \mathcal{C}_f est au-dessus de \mathcal{C}_g .