NOM :

INTERRO DE COURS – SEMAINE 27

Exercice 1 – On considère une urne contenant quatre boules rouges et cinq boules noires.
On prélève successivement et avec remise dix boules dans cette urne et on note X le nombre de boules rouges obtenues.

1. Déterminer la loi de X. On précisera notamment $X(\Omega)$ ainsi que la formule donnant $P(X=k)$ en fonction de k pour tout $k \in X(\Omega)$.

Solution : Il s'agit de $n=10$ répétitions de l'épreuve de Bernoulli de succès "obtenir une boule rouge", de probabilité $p=\dfrac{4}{9}$. Ces répétitions sont identiques et indépendantes. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, donc X suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=\dfrac{4}{9}$.
Son support est donné par $X(\Omega)=[\![0,10]\!]$ et pour tout $k \in X(\Omega)$,

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k \times (1-p)^{n-k}=\binom{10}{k}\times\left(\frac{4}{9}\right)^k\times\left(\frac{5}{9}\right)^{10-k}.$$

2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Solution : Comme X suit une loi binomiale, alors

$$E(X)=np=10\times\frac{4}{9}=\frac{40}{9} \quad \text{et} \quad V(X)=np(1-p)=\frac{40}{9}\times\frac{5}{9}=\frac{200}{81}.$$

3. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules rouges. On donnera le résultat sous la forme $2^a\times3^b\times5^c$, pour a, b et c trois entiers *(non nécessairement positifs)*.

Solution : J'utilise la formule obtenue à la question **1.** en remplaçant k par 2 :

$$P(X=2)=\binom{10}{2}\times\left(\frac{4}{9}\right)^2\times\left(\frac{5}{9}\right)^8=45\times\frac{4^2\times5^8}{9^{2+8}}=2^{2\times2}\times3^{2-2\times10}\times5^{1+8}=2^4\times3^{-18}\times5^9.$$