9 | Compléments sur les suites

I – Propriétés éventuelles d'une suite

1 – Suites monotones

Définition 9.1 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** lorsque
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\leqslant u_{n+1},$$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** lorsque
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\geqslant u_{n+1},$$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement croissante** lorsque
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n< u_{n+1},$$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement décroissante** lorsque
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n> u_{n+1},$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **monotone** (resp. **strictement monotone**) lorsqu'elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

Méthode 9.2 – Montrer qu'une suite est croissante ou décroissante
Pour établir qu'une suite est monotone, on peut :

1. Étudier le signe de la différence $u_{n+1}-u_n$. En effet, on sait que
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante} \iff \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}-u_n\geqslant 0,$$
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante} \iff \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}-u_n\leqslant 0.$$
2. Comparer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 **lorsque tous les termes sont strictement positifs**.
En effet, on sait que
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante} \iff \forall n\in\mathbb{N},\quad \frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1,$$
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante} \iff \forall n\in\mathbb{N},\quad \frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant 1.$$

Exemple 9.3 –

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$ et pour tout entier $n\geqslant 0$, $u_{n+1}=u_n^2+u_n+1$ est strictement croissante.
Je calcule la différence entre deux termes consécutifs : $u_{n+1}-u_n=u_n^2+u_n+1-u_n=u_n^2+1$.
Or $u_n^2\geqslant 0$ car c'est un carré donc $u_{n+1}-u_n\geqslant 1>0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par $u_n=\dfrac{2^n}{n+1}$ est strictement croissante.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a tous ses termes strictement positifs et pour tout entier $n\geqslant 1$,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}}{n+2}\times\frac{n+1}{2^n}=\frac{2\times(n+1)}{n+2}=\frac{2n+2}{n+2}=1+\frac{n}{n+2}>1.$$
Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

Méthode 9.4 – Variations des suites usuelles

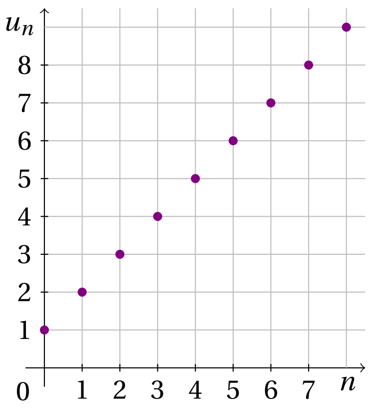
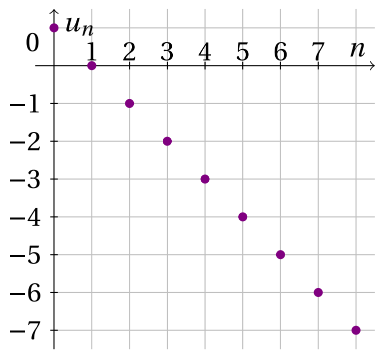
- **Cas des suites arithmétiques.**
  Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors

$$u_{n+1} = u_n + r \iff u_{n+1} - u_n = r.$$

La monotonie de la suite dépend donc du signe de r :

▷ Si $r > 0$, alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

▷ Si $r < 0$, alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

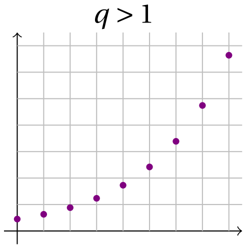
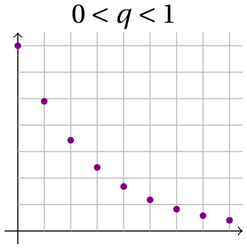
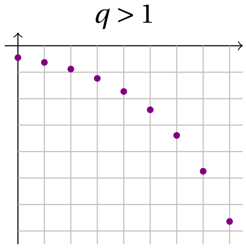
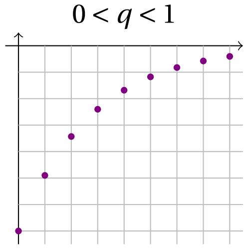
Si $r > 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.	Si $r < 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
	

- **Cas des suites géométriques.**
  Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. Alors

$$u_n = u_0 \times q^n \quad \text{et} \quad u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n = u_0 \times q^n \times (q-1).$$

La monotonie de la suite dépend des signes de u_0, de q^n et de $(q-1)$.

1. Si $q < 0$, alors q^n est positif lorsque n est pair et négatif lorsque n est impair, donc la suite n'est pas monotone. On parle de suite *alternée.*
2. Si $q > 0$, alors la suite est monotone, croissante ou décroissante selon les cas :
   ▷ Si $u_0 > 0$ et $q > 1$, la suite est croissante *(les termes grandissent, dans le positif).*
   ▷ Si $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$, la suite est décroissante *(les termes rapetissent, dans le positif).*
   ▷ Si $u_0 < 0$ et $q > 1$, la suite est décroissante *(les termes grandissent, dans le négatif).*
   ▷ Si $u_0 < 0$ et $0 < q < 1$, la suite est croissante *(les termes rapetissent, dans le négatif).*

$u_0 > 0$		$u_0 < 0$	
$q > 1$	$0 < q < 1$	$q > 1$	$0 < q < 1$
			

Exemple 9.5 – Déterminer le sens de variation des suites suivantes, définies par la donnée d'un terme initial et d'une relation de récurrence.

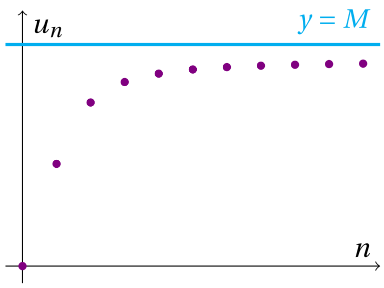
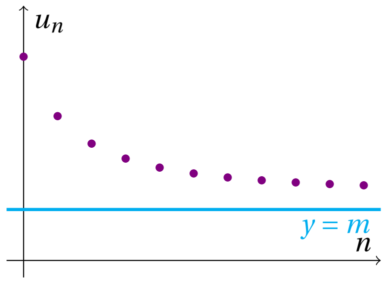
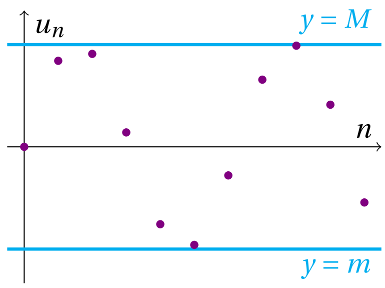
1. $u_0 = 7$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + 4$.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = 4 > 0$. Donc elle est croissante.
2. $v_1 = -3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = 5v_n$.
   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $q = 5 > 1$ et de premier terme $v_1 = -3 < 0$. Donc elle est décroissante.

2 – Suite majorée/minorée/bornée

Définition 9.6 – Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et m et M deux réels. On dit que

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** par M lorsque
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant M.$$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** par m lorsque
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant m.$$

Enfin la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **bornée** lorsqu'elle est à la fois majorée **et** minorée.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.	La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée.	La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
		

Méthode 9.7 – Montrer qu'une suite est majorée/minorée/bornée
Pour montrer qu'une suite est majorée, on opère de la même façon que pour une fonction : on étudie le signe de $u_n - M$ pour tout n et on montre que $u_n - M \leqslant 0$.
De la même manière, on étudie le signe de $u_n - m$ pour tout n et on montre que $u_n - m \geqslant 0$ pour prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par m.

Exemple 9.8 – Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3n^2}{n^2+1}$ est majorée par 3.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n - 3 = \frac{3n^2}{n^2+1} - 3 = \frac{3n^2 - 3\left(n^2+1\right)}{n^2+1} = \frac{-3}{n^2+1}.$$
Or $-3 < 0$ et $n^2 + 1 > 0$ donc $\dfrac{-3}{n^2+1} < 0$. Autrement dit, $u_n - 3 < 0$ *i.e.* $u_n < 3$.
Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien majorée par 3.

II – Limite d'une suite réelle

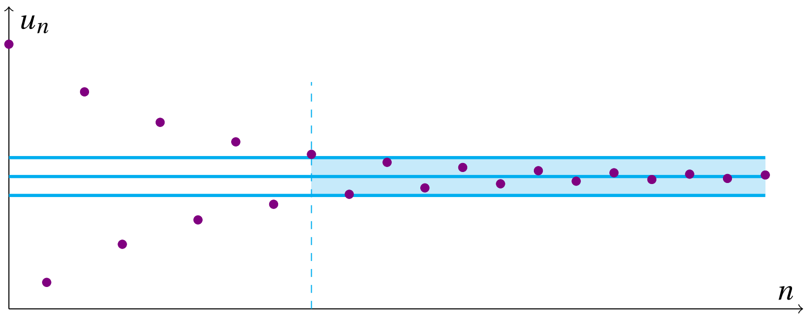
1 – Limite finie

Définition 9.9 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie sur $\mathbb{N}$ et ℓ un réel.

1. Dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour **limite** le réel ℓ signifie que le terme u_n devient arbitrairement proche du réel ℓ pourvu que n soit suffisamment grand. On écrit alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

2. Une suite qui admet pour limite un réel ℓ est dite **convergente**.



Graphiquement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang. La distance entre les termes de la suite et sa limite tend à s'annuler, ce qui se traduit par le résultat suivant.

Proposition 9.10

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \ell = 0$.

Exemple 9.11 – Montrer que la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n^2}$ tend vers 1 en $+\infty$.

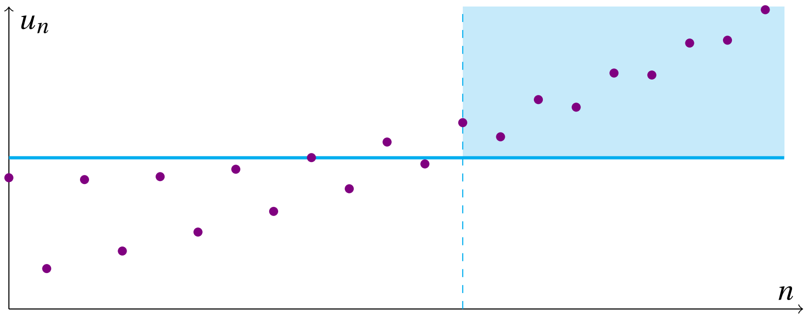
Lorsque n tend vers $+\infty$, alors n^2 tend aussi vers $+\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$. J'en déduis alors que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n^2} = 1 - 0 = 1.$$

2 – Limite infinie

Définition 9.12 –

- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **admet une limite** égale à $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si le terme u_n prend des valeurs **positives** arbitrairement grandes, pourvu que n soit suffisamment grand. On écrit alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$
- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **admet une limite** égale à $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si le terme u_n prend des valeurs **négatives** arbitrairement grandes, pourvu que n soit suffisamment grand. On écrit alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$$
- Une suite qui admet une limite infinie est dite **divergente**.



Graphiquement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]a,+\infty[$ contient tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang.

Exemple 9.13 – Montrer que la suite définie $\forall n \geqslant 0$ par $u_n = \dfrac{n^2}{n+1}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Les termes u_n sont des fractions rationnelles de la variable n. J'utilise les résultats que je connais pour les fonctions et ne regarde que les termes de plus haut degré.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty.$$

Remarque 9.14 –

- Une suite peut ne pas admettre de limite. Par exemple la suite de terme général $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs 1 et -1. Elle n'admet donc pas de limite. On parle là aussi de suite **divergente**.
- En revanche, si une suite converge vers un réel ℓ ou diverge vers $\pm\infty$, alors cette limite est **unique**.
- Tous les résultats concernant les opérations sur les limites vus au Chapitre 7 concernant les fonctions restent valables pour les suites.

Proposition 9.15

Le tableau suivant donne la limite de q^n, si celle-ci existe, en fonction des valeurs de q :

	$q > 1$	$q = 1$	$q \in]-1,1[$	$q \leqslant -1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$	$+\infty$	1	0	*Pas de limite*

Méthode 9.16 – Limites des suites usuelles

- **Cas des suites arithmétiques.**
  Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors
  $$u_{n+1} = u_n + r \quad \text{et} \quad u_n = u_0 + n \times r.$$
  La limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dépend donc du signe de r.
  1. Si $r > 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, *i.e.* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
  2. Si $r < 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$, *i.e.* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- **Cas des suites géométriques.**
  Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. Alors
  $$u_{n+1} = q \times u_n \quad \text{et} \quad u_n = u_0 \times q^n.$$
  L'existence d'une limite pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dépend donc de la valeur de q.

1. Si $q < -1$, alors la suite est alternée et n'admet pas de limite.
2. Si $-1 < q < 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, *i.e.* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3. Si $q > 1$, alors la suite est monotone donc elle admet une limite qui dépend cette fois du signe de u_0 :
   - ▷ Si $u_0 > 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, *i.e.* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   - ▷ Si $u_0 < 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$, *i.e.* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Les graphiques de la Méthode 9.4 montrent les différentes limites possibles dans le cas où $q > 0$.

Exemple 9.17 – Déterminer les limites des suites suivantes, définies par récurrence.

1. $u_0 = 7 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + 4$.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = 4 > 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. $v_1 = -3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = 5v_n$.
   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $q = 5 > 1$, de premier terme $v_1 = -3 < 0$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

III – Passage à la limite et relation d'ordre

1 – Théorèmes de majoration/minoration

Théorème 9.18

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n$.

- Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n.$$
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, *i.e.* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge aussi et
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$$
- Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$, *i.e.* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge aussi et
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$$

Exemple 9.19 – Calculer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \left(2 + (-1)^n\right) n$.

La difficulté se situe au niveau du $(-1)^n$. Mais je sais que $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, donc que $1 \leqslant 2 + (-1)^n \leqslant 3$.
En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$n \leqslant \left(2 + (-1)^n\right) n = v_n.$$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, alors je peux en déduire que
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$$

2 – Théorème d'encadrement

Théorème 9.20 – Théorème des gendarmes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites telles que $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell.$$

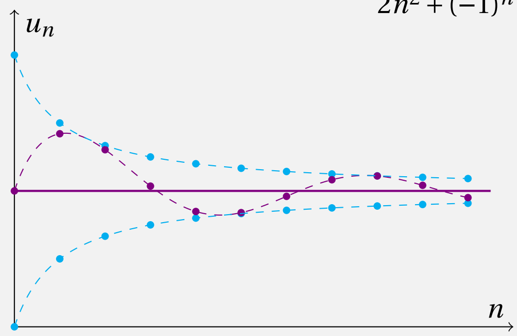
Exemple 9.21 – Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{2n^2+(-1)^n}$.

J'utilise de nouveau que $\forall n\in\mathbb{N},\quad -1\leqslant(-1)^n\leqslant 1$.
Alors $2n^2-1\leqslant 2n^2+(-1)^n\leqslant 2n^2+1$ et donc
$\dfrac{1}{2n^2+1}\leqslant\dfrac{1}{2n^2+(-1)^n}\leqslant\dfrac{1}{2n^2-1}$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2n^2+1}\leqslant u_n\leqslant\frac{1}{2n^2-1}.$$

Enfin comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n^2+1}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n^2-1}=0$, grâce au théorème des gendarmes j'en déduis que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$



(Le graphe n'est pas celui de la suite (u_n) mais est plus visuel.)

3 – Fonctions monotones

Théorème 9.22 – Théorème de la limite monotone

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Corollaire 9.23

En conséquence du théorème de limite monotone,

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante qui n'est pas majorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante qui n'est pas minorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Méthode 9.24 – Étudier la convergence d'une suite de la forme $u_{n+1}=f(u_n)$
Pour étudier la convergence d'une suite définie par une relation du type $u_{n+1}=f(u_n)$:

1. On commence par étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en utilisant la Méthode 9.2.
2. On montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée ou minorée en utilisant la Méthode 9.7.
3. On applique le théorème de la limite monotone (Théorème 9.22) :
   - Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, alors elle converge.
   - Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, alors elle converge.
4. Enfin, pour déterminer la limite ℓ, on utilise le fait que $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}$ pour obtenir une équation du type $f(\ell)=\ell$ que l'on résout ensuite pour trouver ℓ.

Les différentes étapes de cette étude sont le plus souvent guidées par les questions de l'énoncé.

Exemple 9.25 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Je calcule la différence entre deux termes consécutifs. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
   $$u_{n+1} - u_n = u_n - u_n^2 - u_n = -u_n^2 \leqslant 0,$$
   puisque tout carré est positif. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = \frac{1}{2}$ et $0 \leqslant \frac{1}{2} \leqslant 1$. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
   Par hypothèse de récurrence, je sais que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   Or $u_{n+1} = u_n - u_n^2 = u_n(1-u_n)$. Et puisque $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, alors $0 \leqslant 1 - u_n \leqslant 1$.
   Donc par produit,
   $$0 = 0 \times 0 \leqslant u_n(1-u_n) \leqslant 1 \times 1 = 1.$$
   Finalement j'ai montré que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$, c'est-à-dire que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et que la propriété est héréditaire.
   Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1.$$
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante d'après la question **1.** et minorée par 0 d'après la question **2.**.
   Donc grâce au théorème de la limite monotone, j'en déduis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
4. Déterminer sa limite ℓ.
   En notant ℓ cette limite, je sais que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$.
   Puisque $u_{n+1} = u_n - u_n^2$, en faisant tendre n vers l'infini et en passant à la limite, j'obtiens que
   $$\ell = \ell - \ell^2 \iff \ell^2 = 0 \iff \ell = 0.$$
   Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell = 0$.