EXERCICES — CHAPITRE 8

Exercice 1 (★★) – Calculer les dérivées des fonctions suivantes (sans donner de justification concernant l'existence de cette dérivée).

1. $a(x) = 8x^3 + 4x^2 - 12x + 5$
2. $b(x) = \left(2x^2 + x - 2\right)(3x+2)$
3. $c(x) = \dfrac{1}{3x-2}$
4. $d(x) = \sqrt{3x^2 - x - 1}$
5. $e(x) = \dfrac{2x^2 + x - 2}{3x+2}$
6. $f(x) = \left(x^2+1\right) \times \dfrac{1}{x}$
7. $g(x) = x\sqrt{x} + x$
8. $h(x) = \left(\sqrt{x}+1\right)^2$
9. $i(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$
10. $j(x) = \left(2x^2 - 4x + 3\right)^7$

Exercice 2 (★★) – Étudier les fonctions suivantes sur leur ensemble de définition puis tracer l'allure de leur courbe représentative.

1. $a(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ pour $x \in \mathbb{R}$,
2. $b(x) = \dfrac{x}{x^2+3x+2}$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$,
   Indication numérique : $\sqrt{2} \approx 1.4$, $\quad b\left(-\sqrt{2}\right) \approx 5.8$ *et* $b\left(\sqrt{2}\right) \approx 0.2$.
3. $c(x) = \dfrac{x^2+x+3}{x^2+x+1}$ pour $x \in \mathbb{R}$,
4. $d(x) = \sqrt{x^2+3x-4}$ pour $x \in \left]-\infty, -4\right] \cup \left[1, +\infty\right[$.

Exercice 3 (★) – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad f(x) = \dfrac{15x+60}{x^2+9}$.

1. On note f' sa dérivée. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
3. Donner le tableau de variation de f.
4. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -4.
5. Dans un même repère, tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f ainsi que la tangente $\mathcal{T}$.

Exercice 4 (★★) – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad f(x) = \dfrac{x^2-x+4}{x^2+3}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

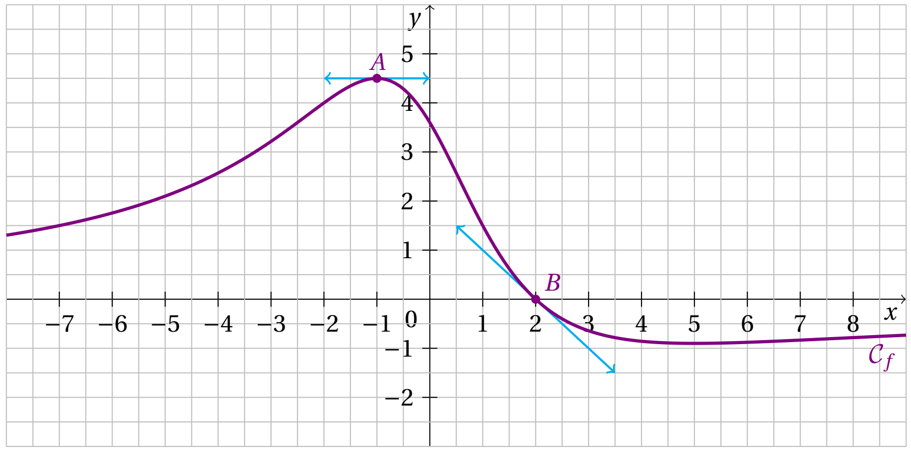
1. Calculer la dérivée de la fonction f.
2. Étudier les variations de f.
3. Donner une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
4. Sur un même graphique, tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f ainsi que la tangente $\mathcal{T}$.

Exercice 5 (★★) –

Partie A

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On sait que

- la tangente au point $A\left(-1, \dfrac{9}{2}\right)$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ est parallèle à l'axe des abscisses,
- la tangente au point $B(2,0)$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point de coordonnées $(0,2)$.



On note f' la dérivée de la fonction f. À partir du graphique et des renseignements fournis,

1. Déterminer $f'(-1)$ et $f'(2)$.

La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = -2x + \dfrac{7}{2}$.

2. Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.
3. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
   a) $f'(0) \times f'(3) \leqslant 0$
   b) $f'(-3) \times f'(1) \leqslant 0$

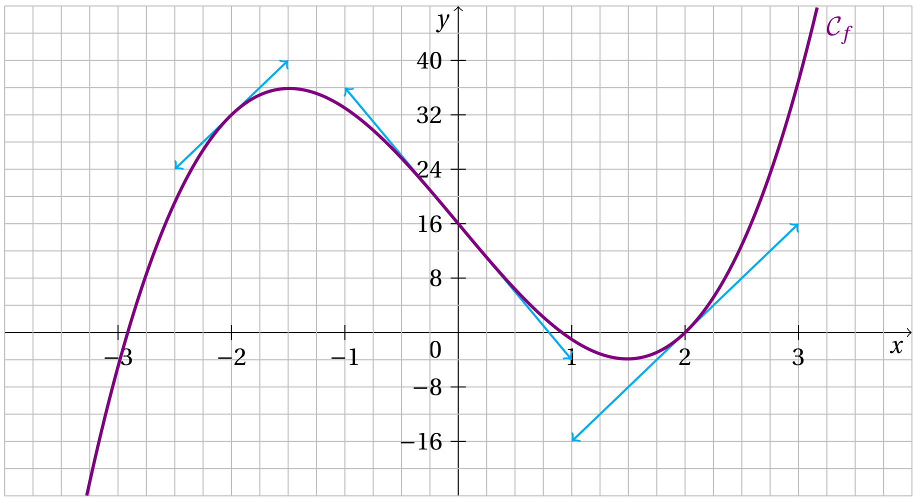
Partie B

La fonction f est définie pour tout réel x par $\quad f(x) = \dfrac{18-9x}{x^2+5}$.

1. Montrer que pour tout réel x, $\quad f'(x) = \dfrac{9\left(x^2-4x-5\right)}{\left(x^2+5\right)^2}$.

2. a) Étudier le signe de $f'(x)$.
   b) Donner le tableau de variation de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -2.

Exercice 6 (★★) – Sur le graphique ci-dessous est tracée la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Certaines de ses tangentes ont aussi été représentées.



Partie A

On note f' la dérivée de la fonction f. À partir du graphique,

1. Déterminer $f'(-2)$, $f'(0)$ et $f'(2)$.
2. Donner une estimation des solutions de l'équation $f'(x) = 0$.

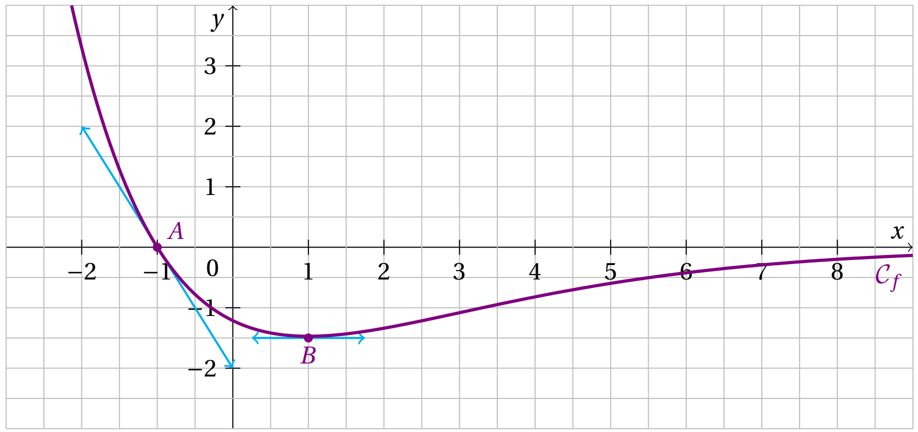
Partie B

La fonction f est définie pour tout réel x par $\quad f(x) = 3x^3 - 20x + 16$.

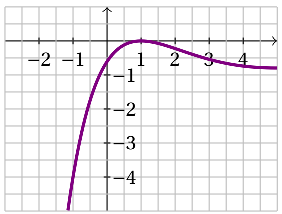
1. Calculer $f'(x)$.
2. Calculer $f'(-2)$, $f'(0)$ et $f'(2)$, puis comparer ces résultats avec les valeurs obtenues dans la Partie A.
3. Déterminer les abscisses des points en lesquels la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ est parallèle à l'axe des abscisses.
4. Donner le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 7 (★★) – La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. On sait que

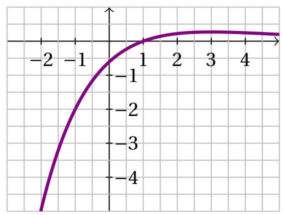
- la courbe coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse -1 et la tangente à la courbe au point A passe par le point de coordonnées $(0, -2)$,
- la courbe admet au point B d'abscisse 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.



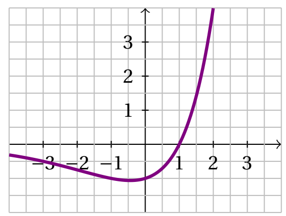
1. À partir du graphique et des renseignements fournis, déterminer $f'(-1)$ et $f'(1)$.
2. L'une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f'. Déterminer laquelle.



Courbe $\mathcal{C}_1$



Courbe $\mathcal{C}_2$



Courbe $\mathcal{C}_3$

Exercice 8 (★★★) – Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$ par

$$f(x) = 8x^2 - 2x - \frac{9}{2x+3}.$$

1. On note f' la dérivée de la fonction f. Montrer que $f'(x) = \dfrac{8x\left(8x^2+23x+15\right)}{(2x+3)^2}$.
2. Étudier les variations de la fonction f.
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f.