8 Dérivabilité et étude de fonctions

I – Dérivée en un point

1 – Nombre dérivé

Définition 8.1 – Soient f une fonction définie sur intervalle I et $a \in I$ un réel. La fonction f est dite **dérivable en** a si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite **finie** lorsque x tend vers a.
Cette limite est alors appelée **nombre dérivé** de f en a et est notée $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Exemple 8.2 –

- Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est dérivable en 1.
  Je calcule le taux d'accroissement : $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{x^2-1^2}{x-1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1.$
  Alors $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$ donc la fonction f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.
- Plus généralement, montrer que la fonction f est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}$.
  De la même manière, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \dfrac{x^2-a^2}{x-a} = \dfrac{(x-a)(x+a)}{x-a} = x+a.$
  Alors $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} x+a = 2a$ donc la fonction f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$.
- Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}^*$.
  Je calcule le taux d'accroissement : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a} = \dfrac{\frac{a-x}{ax}}{x-a} = \dfrac{a-x}{ax} \times \dfrac{1}{x-a} = -\dfrac{1}{ax}.$
  Alors $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} -\frac{1}{ax} = -\frac{1}{a^2}$ donc la fonction f est dérivable en a et $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$.

Remarque 8.3 –

- En posant $h = x-a$ et sous réserve d'existence, on peut également écrire que

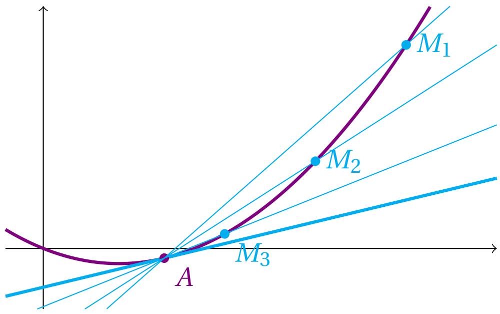
$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

- En pratique, on utilise la définition seulement pour montrer la dérivabilité aux *"points à problèmes"*. En dehors de ces points, on justifie la dérivabilité à l'aide des propriétés de la Section II.

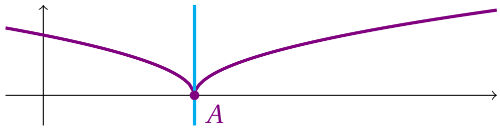
2 – Interprétation géométrique

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On note A le point de coordonnées $\big(a, f(a)\big)$ et M le point de coordonnées $\big(x, f(x)\big)$ pour $x \in I$.
Alors le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ correspond au coefficient directeur de la droite (AM).

- Si f est dérivable en a, ce coefficient directeur tend vers $f'(a)$ lorsque x tend vers a. Par ailleurs, la droite (AM) tend vers une position limite qui est la tangente à la courbe représentative de f au point A. Le nombre dérivé $f'(a)$ est alors le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point A.



- Si la limite du taux d'accroissement est infinie, alors la courbe représentative de f possède en A une tangente verticale d'équation $x = a$.



On résume cela dans la proposition suivante :

Proposition 8.4

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

- Si f est dérivable en a, alors $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f au point d'abscisse a. L'équation de cette tangente est donnée par

$$y = f'(a)\big(x-a\big) + f(a).$$

- Si $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en a et la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente verticale au point d'abscisse a.

Exemple 8.5 –

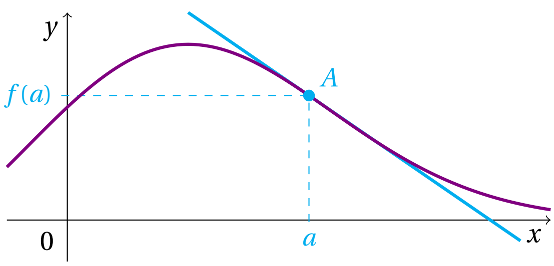
- Puisque la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est dérivable en $a = 1$, de dérivée $f'(1) = 2$, alors la courbe représentative de f admet au point A de coordonnées $(1,1)$ une tangente d'équation

$$y = 2(x-1)+1 \quad \Longleftrightarrow \quad y = 2x-1.$$

- Au contraire, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{|x|}$ n'est pas dérivable en 0 et la courbe représentative de f admet une tangente verticale au point de coordonnées $(0,0)$.

3 – Approximation affine

Soient f une fonction définie sur un intervalle I, dérivable en a, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a. Au voisinage de a, la tangente en A ressemble beaucoup à la courbe $\mathcal{C}_f$.
On dit que la tangente est une **approximation affine** de la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage du point d'abscisse a.



Théorème 8.6

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On suppose que f est dérivable en a.
Alors pour h proche de 0, une valeur approchée de $f(a+h)$ est donnée par

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a).$$

Exemple 8.7 – Calculer une valeur approchée de $\sqrt{1.02}$.

Soient $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 1$. Alors f est dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{1}{2}$. Donc

$$\sqrt{1.02} = f(1.02) \approx 1 + \frac{1}{2}(1.02 - 1) = 1.01.$$

Avec une calculatrice, j'obtiens $\sqrt{1.02} = 1.00995$.

Corollaire 8.8

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. Si f est dérivable en a, alors

f est continue en a.

Remarque 8.9 – La réciproque n'est pas vraie : une fonction peut être continue en un point sans être dérivable en ce point. Par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'y est pas dérivable.

II – Fonction dérivée

Définition 8.10 – Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est **dérivable sur** I, si f est dérivable en tout point $x \in I$. Alors la fonction

$$f' : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array} \qquad \text{avec} \quad \forall a \in I, \quad f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

est appelée la **fonction dérivée** de la fonction f.

Exemple 8.11 –

- La fonction carrée est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction $\sqrt{\cdot}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

1 – Dérivée des fonctions usuelles

Le tableau suivant indique les dérivées des fonctions usuelles.
($k \in \mathbb{R}$ est une constante et $n \in \mathbb{N}^*$ un entier positif non nul)

f est **définie** sur	$f(x)$	$f'(x)$	f est **dérivable** sur
$\mathbb{R}$	k	0	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x	1	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$[0, +\infty[$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$

Remarque 8.12 – Seule la fonction racine carrée n'est pas dérivable sur son ensemble de définition : en effet, elle est définie en 0 mais n'y est pas dérivable.

2 – Opérations sur les fonctions dérivables

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Opération	Dérivée
Somme	$(u+v)' = u' + v'$
Multiplication par une constante k	$(ku)' = k \times u'$
Produit	$(uv)' = u'v + uv'$
Quotient	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
Composition	$(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$

Remarque 8.13 – La formule de dérivation de la composition de deux fonctions permet de déterminer de nombreuses autres formules de dérivation.

Fonction	Dérivée
u^n pour $n > 0$	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\frac{1}{u}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

Proposition 8.14

- Une fonction polynomiale est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Une fraction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

Méthode 8.15 – Calculer la dérivée d'une fonction
Pour calculer la dérivée d'une fonction f :

1. On commence par repérer sous quelle forme est donnée la fonction f.
   Est-ce une somme de fonctions usuelles $u+v$? Un produit $u \times v$? Un quotient $\frac{u}{v}$?
2. On identifie les différentes fonctions u et v puis on calcule les dérivées u' et v'.
3. On applique la formule adéquate pour obtenir la dérivée f'.

Exemple 8.16 – Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

- $f(x) = 2x^2 - x + 5$
  f est une fonction polynomiale donc sa dérivée se calcule terme à terme :
  $$f'(x) = 2 \times (2x) - 1 = 4x - 1.$$

- $g(x) = (x+3)\sqrt{x}$
  g est de la forme uv avec $u(x) = x+3$ et $v(x) = \sqrt{x}$. Donc $g' = u'v + uv'$ avec
  $$u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$
  Ainsi
  $$g'(x) = 1 \times \sqrt{x} + (x+3) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x+3}{2\sqrt{x}} = \frac{2x}{2\sqrt{x}} + \frac{x+3}{2\sqrt{x}} = \frac{3x+3}{2\sqrt{x}} = \frac{3(x+1)}{2\sqrt{x}}.$$

- $h(x) = \dfrac{2x-5}{x^2+3}$
  h est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x-5$ et $v(x) = x^2+3$. Donc $h' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec
  $$u'(x) = 2 \quad \text{et} \quad v'(x) = 2x.$$
  Ainsi
  $$h'(x) = \frac{2(x^2+3) - 2x(2x-5)}{(x^2+3)^2} = \frac{2x^2+6-4x^2+10x}{(x^2+3)^2} = \frac{-2x^2+10x+6}{(x^2+3)^2}.$$
- $i(x) = \dfrac{1}{2x^2+3}$
  i est de la forme $\dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = 2x^2+3$. Donc $i' = -\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u'(x) = 4x$. Ainsi
  $$i'(x) = -\frac{4x}{(2x^2+3)^2}.$$
- $j(x) = \sqrt{x^2+1}$
  j est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2+1$. Donc $j' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u'(x) = 2x$. Ainsi
  $$j'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Remarque 8.17 – Il est très important de prendre l'habitude de toujours **simplifier** au maximum les calculs de dérivées. Cela facilite ensuite l'étude de son signe. Il faut notamment penser à **factoriser au maximum** et à **regrouper les différents termes** (fractions à mettre au même dénominateur).

III – Application à l'étude des variations d'une fonction

1 – Monotonie et signe de la dérivée

Théorème 8.18

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors

$$f \text{ est constante sur } I \quad \text{si et seulement si} \quad \forall x \in I, \quad f'(x) = 0.$$

ATTENTION ! Le résultat est faux si I n'est pas un intervalle. Ainsi la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -1$ si $x < 0$ et $f(x) = 1$ si $x > 0$, vérifie $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ mais f n'est pas constante.

Théorème 8.19

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si $\forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0$ (resp. $f'(x) \leqslant 0$).
- La fonction f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I si et seulement si f' est strictement positive (resp. strictement négative) sur I **sauf éventuellement en un nombre fini de points** où f' peut s'annuler.

Exemple 8.20 – Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$. Ainsi $f'(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) > 0$. On peut donc appliquer le deuxième point du théorème précédent et en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Méthode 8.21 – Étudier les variations d'une fonction
Pour étudier les variations d'une fonction :

1. On justifie que la fonction est bien dérivable.
2. On calcule la dérivée de la fonction.
3. On étudie le signe de la dérivée.
4. On en déduit les variations de la fonction.

Exemple 8.22 – Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 7$.
La fonction f est une fonction polynomiale donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6 \times \left(x^2 - 5x + 6\right).$$

Il me faut maintenant étudier le signe du polynôme de degré 2, en sachant que $6 > 0$.
Son discriminant vaut $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$. Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

Par ailleurs, le coefficient dominant est strictement positif.
J'en déduis alors le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗		↘		↗	

Remarque 8.23 – On prend par ailleurs l'habitude de compléter les tableaux de variation par les limites de f aux bornes de l'intervalle et par les valeurs de $f(x)$ en les abscisses où f change de variation.
Je calcule les limites de la fonction f ainsi que les images de 2 et de 3 :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$$

et

$$f(2) = 2 \times 2^3 - 15 \times 2^2 + 36 \times 2 + 7 = 35 \quad \text{et} \quad f(3) = 2 \times 3^3 - 15 \times 3^2 + 36 \times 3 + 7 = 34.$$

D'où le tableau de variation complété suivant :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	35	↘	34	↗	$+\infty$

2 – Extrema locaux

On rappelle qu'un **extremum** est un *maximum* ou un *minimum*.

Théorème 8.24

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I de $\mathbb{R}$ et a un réel appartenant à I.

- Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.
- Si la dérivée f' s'annule en a **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en a.

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$\searrow$		min		$\nearrow$

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$\nearrow$		max		$\searrow$

Exemple 8.25 – Donner les extrema de la fonction précédente $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 7$ sur $\mathbb{R}$.

En me servant du tableau de variation de f établi dans l'exemple précédent, je remarque que f' s'annule aux points d'abscisses 2 et 3 tout en changeant de signe. Donc 2 et 3 sont les abscisses des extrema locaux de f. D'après les variations, je peux affirmer que 35 est un maximum local, atteint en 2, et que 34 est un minimum local, atteint en 3.

3 – Représentation graphique

Grâce à la méthode du chapitre précédent, qui permet de tracer l'allure d'une courbe à partir du tableau de variation de la fonction, l'étude de la fonction f permet donc de connaître l'allure de la courbe. Parfois, le tracé d'une tangente en un point peut aider à obtenir un tracé plus précis.

Méthode 8.26 – Calculer l'équation de la tangente en un point

Pour calculer l'équation de la tangente en un point A, d'abscisse a :

1. Si ce n'est pas déjà fait, on calcule l'expression de la dérivée $f'(x)$.
2. On calcule ensuite les images $f(a)$ et $f'(a)$.
3. On utilise la formule de la Proposition 8.4 :

$$y = f'(a)\big(x - a\big) + f(a).$$

Exemple 8.27 – On considère à nouveau la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 7$. Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.

Le calcul de la dérivée f' a déjà été effectué dans l'exemple précédent :

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36.$$

Je calcule alors $f(0)$ et $f'(0)$:

$$f(0) = 2 \times 0^3 - 15 \times 0^2 + 36 \times 0 + 7 = 7 \quad \text{et} \quad f'(0) = 6 \times 0^2 - 30 \times 0 + 36 = 36.$$

J'applique alors la formule de la Proposition 8.4 et j'obtiens l'équation de la tangente :

$$y = 36(x - 0) + 7 \iff y = 36x + 7.$$

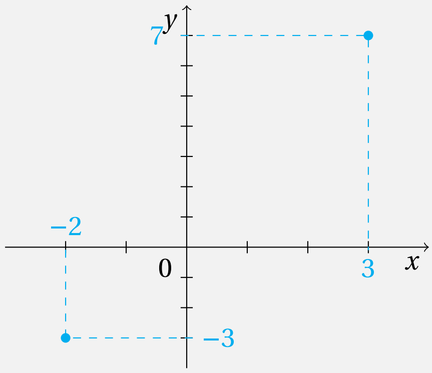
Méthode 8.28 – Tracer une droite lorsque l'on en connait l'équation
Pour tracer une droite à partir de son équation $y = ax + b$, il suffit de déterminer les coordonnées de deux points appartenant à cette droite. Pour cela, on remplace successivement x dans l'équation par deux valeurs x_1 et x_2 puis on calcule les ordonnées correspondantes y_1 et y_2. On obtient ainsi les coordonnées de deux points $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$ appartenant à la droite. On place alors ces deux points dans un repère et on trace la droite passant par ces deux points.

Exemple 8.29 – Tracer dans un repère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x + 1$.

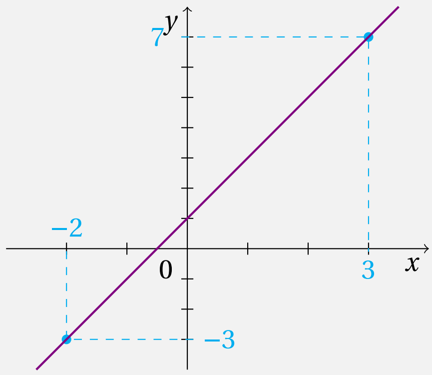
Je commence par choisir deux valeurs de x et je calcule les ordonnées correspondantes :

- ▷ Pour $x_1 = -2$, j'obtiens $y_1 = 2 \times (-2) + 1 = -3$.
- ▷ Pour $x_2 = 3$, j'obtiens $y_2 = 2 \times 3 + 1 = 7$.

- Je place les deux points $A(-2, -3)$ et $B(3, 7)$.



- Je trace la droite passant par les deux points.



4 – Exemple : étude d'une fonction

Exemple 8.30 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \dfrac{4x-3}{x^2+1}$.

1. Calculer $f'(x)$.

   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et quotient de fonctions dérivables.
   Comme f est de la forme $f = 1 - \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 4x - 3$ et $v(x) = x^2 + 1$, alors $f' = -\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = 4$ et $v'(x) = 2x$. Donc pour tout réel x,

$$f'(x) = -\frac{4\left(x^2+1\right) - 2x(4x-3)}{\left(x^2+1\right)^2} = -\frac{4x^2+4-8x^2+6x}{\left(x^2+1\right)^2} = -\frac{-4x^2+6x+4}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^2-6x-4}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

   Ainsi f' est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad f'(x) = \dfrac{4x^2-6x-4}{\left(x^2+1\right)^2}$.

2. Étudier les variations de la fonction f.

   Les variations de la fonction f se déduisent du signe de sa dérivée, donc j'étudie le signe de $f'(x) = \dfrac{4x^2-6x-4}{\left(x^2+1\right)^2}$. Pour tout réel x, $\left(x^2+1\right)^2 > 0$. Ainsi $f'(x)$ est du même signe que le polynôme $4x^2 - 6x - 4$. Son discriminant vaut $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 4 \times (-4) = 36 + 64 = 100 > 0$.
   Il admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-6) - \sqrt{100}}{2 \times 4} = \frac{6-10}{8} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{6+10}{8} = 2.$$

Je calcule aussi les limites de f ainsi que les images en $-\dfrac{1}{2}$ et 2 :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 - \lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{x^2} = 1 - \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 - \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 1,$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{4\times\left(-\frac{1}{2}\right)-3}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1} = 1 - \frac{-5}{\frac{5}{4}} = 1+4 = 5 \quad \text{et} \quad f(2) = 1 - \frac{4\times 2-3}{2^2+1} = 1 - \frac{5}{5} = 0.$$

J'en déduis alors le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.