EXERCICES — CHAPITRE 7

Exercice 1 (⋆⋆) – Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to 3} 8x^2-2x+4$
2. $\lim\limits_{t\to 5} \dfrac{3t+2}{6t-4}$
3. $\lim\limits_{x\to 3} (2x-1)(8x-4)$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} (3x-4)(x-7)$
5. $\lim\limits_{x\to -\infty} (3x+2)(-6x+4)$
6. $\lim\limits_{x\to 7^-} \dfrac{1}{x-7}$
7. $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{-2}{-x+3}$
8. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+1}{x^2-7x+10}$
9. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{-x+4}$
10. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-4}{x^4-7}$
11. $\lim\limits_{x\to +\infty} 4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}$
12. $\lim\limits_{x\to 0^-} 4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}$
13. $\lim\limits_{x\to 0^+} 4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}$

Exercice 2 (⋆⋆) – Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} 3x^3-2x^2+6x-1$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x^4-8x^2+3}{7x^3-5x+4}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{8x^4-6x+7}{-5x^7-8x+4}$
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{6x^4-8x^2+7}{2x^2-3x^4+6x}$
5. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-3x^7+8x^3+5}{7x^3-8x+12}$
6. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(3x^2-8x+2\right)\left(-8x^3-2x+7\right)$

Exercice 3 (⋆⋆) – Calculer les limites suivantes.

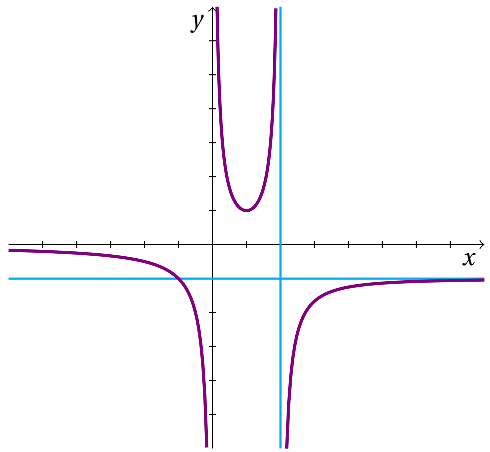
1. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{\dfrac{4x+5}{x-2}}$
2. $\lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{\dfrac{4x+5}{x-2}}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{\dfrac{1}{x}}+x^3\right)^2$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(-3\sqrt{\dfrac{1}{x}}+2\right)^2$

Exercice 4 (⋆) – La courbe ci-contre, représentative d'une fonction f, admet les quatre asymptotes suivantes :

- deux asymptotes horizontales d'équations respectives $y=-1$ et $y=0$,
- deux asymptotes verticales d'équations respectives $x=0$ et $x=2$.

Déterminer graphiquement les limites suivantes :

$$\lim_{x\to -\infty} f(x),\quad \lim_{x\to 0^-} f(x),\quad \lim_{x\to 0^+} f(x),\quad \lim_{x\to 2^-} f(x),\quad \lim_{x\to 2^+} f(x) \quad\text{et}\quad \lim_{x\to +\infty} f(x).$$



Exercice 5 (⋆⋆⋆) – Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2-x}{x^3}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. À l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel x.
2. a) Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
   b) La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle des asymptotes ?

Exercice 6 (⋆⋆⋆) –

1. Soient $P(x)=x^2+x-6$ et $Q(x)=2x^2-3x-2$ deux polynômes.
   a) Résoudre $P(x)=0$ et $Q(x)=0$.
   b) En déduire une factorisation de $P(x)$ et de $Q(x)$.
2. Soit f la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.
   a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
   b) La courbe représentative de la fonction f admet-elle des asymptotes ?

Exercice 7 (⋆⋆⋆) – Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. À l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel x.
2. a) Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
   b) La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle des asymptotes ?

Exercice 8 **(⋆⋆⋆) –** Soit f la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2 - 13x + 7}{4x - 2}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x)$. Qu'en déduit-on pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
2. a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   b) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{4x - 2}$.
   c) En déduire que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet pour asymptote la droite Δ d'équation
   $$y = \frac{x}{2} - 3.$$

Exercice 9 **(⋆) –** Tracer l'allure de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f dont le tableau de variation est donnée ci-dessous.

x	$-\infty$		-4		-3		$+\infty$
f	5	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

Exercice 10 **(⋆⋆) –** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 4, \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4. \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue ?
2. Tracer le graphe de la fonction f.