# Exercices — Chapitre 5

**Exercice 1 (⋆) –** Soient $A$, $B$ et $C$ trois événements.
Exprimer en terme ensembliste les événements suivants :

1. "$A$ et $B$ sont réalisés",
2. "seulement $A$ est réalisé",
3. "aucun des événements $A$, $B$, $C$ n'est réalisé",
4. "un seul des événements $A$, $B$, $C$ est réalisé",
5. "au moins deux des trois événements $A$, $B$, $C$ sont réalisés",
6. "pas plus de deux des trois événements $A$, $B$, $C$ sont réalisés".

**Exercice 2 (⋆) –** On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes.
On considère les événements suivants :

- $A$ : "les deux cartes tirées sont rouges",
- $B$ : "les deux cartes tirées sont un valet et un dix",
- $C$ : "les deux cartes tirées sont des figures".

1. Que représentent les ensembles suivants ?

   a) $\overline{A}$

   b) $A \cap B \cap \overline{C}$

   c) $(A \cap \overline{C}) \cap (B \cap \overline{C})$

   d) $(A \cap B) \cap C$

2. Écrire à l'aide des ensembles $A$, $B$ et $C$ les événements

   a) $F$ : "les deux cartes tirées sont des figures et ne sont pas toutes les deux rouges",

   b) $G$ : "on obtient au plus une figure".

**Exercice 3 (⋆) –** Dans une boîte, il y a quatre jetons disponibles numérotés de 1 à 4.
On tire simultanément au hasard deux jetons.

1. Donner tous les tirages possibles.

Pour la suite, on note $A$ l'événement "les deux jetons sont pairs".

2. Quels sont les tirages constituant les ensembles suivants : $\overline{A}$, $A \cup \overline{A}$ et $A \cap \overline{A}$.
3. On considère $C$ l'événement "la somme des chiffres sur les deux jetons est paire".
   Quels sont les tirages constituant les ensembles suivants ?

$$\overline{C}, \quad A \cup C, \quad A \cap C, \quad A \cup \overline{C} \quad \text{et} \quad A \cap \overline{C}.$$

**Exercice 4 (⋆⋆) –** Une épreuve aléatoire consiste à effectuer des lancers successifs d'un dé. Pour tout entier naturel $k$ supérieur ou égal à 1, $A_k$ désigne l'événement : "le $k$-ième lancer a fourni un 6". Exprimer les événements ci-dessous à l'aide des événements $A_k$ et des opérations autorisées sur les événements.

1. - $P_2$ : "le premier 6 a été obtenu au deuxième lancer",
   - $P_5$ : "le premier 6 a été obtenu au cinquième lancer",
   - $P_n$ : "le premier 6 a été obtenu au $n$-ième lancer", où $n \geqslant 2$.
2. - $D_3$ : "le deuxième 6 a été obtenu au troisième lancer",
   - $D_4$ : "le deuxième 6 a été obtenu au quatrième lancer".

**Exercice 5 (⋆) –** On jette une pièce de monnaie trois fois de suite.

1. Donner la liste de tous les résultats possibles, en notant $P$ pour PILE et $F$ pour FACE.
2. Donner la probabilité des événements suivants :
   - $A$ : "le tirage ne comporte que des PILE",
   - $B$ : "le tirage comporte au moins une fois FACE".

**Exercice 6 (⋆) –** On lance un dé équilibré deux fois de suite.

1. Quelle est la probabilité que la somme des numéros obtenus soit égale à 8 ?
2. Il y a 11 sommes possibles (tous les entiers entre 2 et 12). Pourquoi la probabilité calculée à la première question n'est-elle pas tout simplement égale à $\frac{1}{11}$ ?

**Exercice 7 (⋆⋆) –** On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
On considère les événements :

- $A$ : "la carte choisie est un pique",
- $B$ : "la carte choisie est rouge (coeur ou carreau)",
- $C$ : "la carte choisie est une figure (valet, dame ou roi)".

1. Calculer les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(B \cap C)$, $P(A \cup B)$ et $P(B \cup C)$.
2. Calculer la probabilité de l'événement $D$ : "la carte choisie n'est ni rouge, ni une figure".

**Exercice 8 (⋆) –** On considère une urne $U_1$ contenant une boule rouge et deux boules noires, ainsi qu'une urne $U_2$ contenant trois boules noires. On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher. On lance une pièce équilibrée. Si elle retombe sur le côté PILE, on tire une boule dans l'urne $U_1$, et si on obtient FACE, on tire une boule dans l'urne $U_2$. On considère les événements suivants :

- $P$ (resp. $F$) : "la pièce retombe sur le côté PILE (respectivement FACE)",
- $R$ : "le tirage donne une boule rouge",
- $N$ : "le tirage donne une boule noire".

Sans calcul, donner les valeurs des probabilités suivantes :

$$P_P(R), \qquad P_P(N), \qquad P_F(R), \qquad P_F(N), \qquad P_R(P) \quad \text{et} \quad P_R(F).$$

**Exercice 9 (⋆⋆) –** On considère deux événements $A$ et $B$ tels que

$$P(A) = 0.2, \qquad P(B) = 0.6 \quad \text{et} \quad P(A \cup B) = 0.7.$$

1. Calculer $P(A \cap B)$.
2. En déduire les probabilités conditionnelles $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

**Exercice 10 (⋆⋆⋆) –** Une urne contient huit boules rouges et deux boules noires.
On tire sans remise et successivement trois boules de cette urne.
Quelle est la probabilité que la troisième boule du tirage soit noire ?

**Exercice 11 (⋆⋆) –** On s'intéresse à une entreprise chargée de mettre du lait en bouteilles. La bouteille vide arrive sur un tapis roulant et passe successivement dans deux machines $M_1$ et $M_2$. La machine $M_1$ remplit la bouteille de lait et la machine $M_2$ met le bouchon.
Une étude statistique portant sur un grand nombre de bouteilles de lait à la fin de la chaîne a permis d'établir que 5% des bouteilles ne sont pas correctement remplies et que parmi elles 8% n'ont pas de bouchon. D'autre part, 4% des bouteilles correctement remplies n'ont pas de bouchon. On choisit une bouteille de lait au hasard à la fin de la chaîne et on note

- $R$ l'événement : "la bouteille est correctement remplie",
- $B$ l'événement : "la bouteille a un bouchon".

1. Donner les valeurs de $P(R)$, $P(\overline{R})$, $P_R(B)$, $P_R(\overline{B})$, $P_{\overline{R}}(B)$ et $P_{\overline{R}}(\overline{B})$.
2. Calculer $P(B)$.

**Exercice 12 (⋆⋆) –** Une association de consommateurs a fait une enquête sur des ventes de sacs de pommes. On sait que

- 15% des sacs sont vendus directement dans l'exploitation agricole et le reste est vendu dans des supermarchés.
- Parmi les sacs vendus directement dans l'exploitation, 80% contiennent des pommes de variétés différentes et les autres ne contiennent qu'un seul type de pommes.
- Parmi les sacs vendus dans des supermarchés, 10% contiennent des pommes de variétés différentes et les autres ne contiennent qu'un seul type de pommes.

On désigne par $E$ l'événement "les sacs de pommes sont vendus sur l'exploitation" et par $V$ l'événement "les sacs contiennent des pommes de variétés différentes".
On achète de façon aléatoire un sac de pommes.

1. Donner les valeurs de $P(E)$, $P(\overline{E})$, $P_E(V)$, $P_E(\overline{V})$, $P_{\overline{E}}(V)$ et $P_{\overline{E}}(\overline{V})$.
2. Calculer $P(V)$.
3. On constate que le sac de pommes contient des pommes de variétés différentes.
   Calculer la probabilité qu'il ait été acheté dans un supermarché.

**Exercice 13 (⋆⋆) –** Dans un magasin de CD, 5% des boîtes sont en mauvais état, 60% des boîtes abîmées contiennent un CD défectueux et 98% des boîtes en bon état contiennent un CD en bon état. Un client achète un CD. On note $A$ l'événement "la boîte achetée est abîmée" et $D$ l'événement "le CD acheté est défectueux".

1. Donner les valeurs de $P(A)$, $P(\overline{A})$, $P_A(D)$, $P_A(\overline{D})$, $P_{\overline{A}}(D)$ et $P_{\overline{A}}(\overline{D})$.
2. Calculer $P(D)$.
3. Le client constate que son CD est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté une boîte abîmée ?

**Exercice 14 (⋆⋆⋆) –** Un gardien de but doit faire face, lors d'une démonstration, à un certain nombre de tirs directs. Les expériences précédentes conduisent à penser que

- s'il a arrêté le $n$-ième tir, la probabilité qu'il arrête le $n+1$-ième est 0.8,
- s'il a laissé passer le $n$-ième tir, la probabilité qu'il arrête le suivant est 0.6,
- la probabilité qu'il arrête le premier tir est 0.7.

On note $A_n$ l'événement "le gardien arrête le $n$-ième tir". On a donc $P(A_1) = 0.7$.

1. a) Donner pour $n \geqslant 1$, les valeurs de $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$.
   b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\quad P(A_{n+1}) = 0.2P(A_n) + 0.6$.
2. On pose à présent pour $n \geqslant 1$, $\quad p_n = P(A_n)$ et $u_n = p_n - 0.75$.
   a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison 0.2.
   b) En déduire l'expression de $p_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 15** ($\star\star\star$) –

**Partie A**

On considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie pour tout entier naturel $n\geqslant 1$ par la relation de récurrence $u_{n+1}=\dfrac{4}{10}-\dfrac{3}{10}u_n$ et la condition initiale $u_1=\dfrac{1}{2}$.

1. Soit $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite réelle définie pour tout entier naturel $n\geqslant 1$ par $v_n=13u_n-4$. Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison.
2. Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.
3. Prouver que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $\quad u_n=\dfrac{4}{13}+\dfrac{5}{26}\left(-\dfrac{3}{10}\right)^{n-1}$.

**Partie B**

Un professeur oublie fréquemment les clés de sa salle de colle. Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on note $E_n$ l'événement "le professeur oublie ses clés le jour $n$" et $p_n=P(E_n)$.
On suppose qu'il oublie ses clés le premier jour avec probabilité $\dfrac{1}{2}$. On suppose en outre que

- s'il oublie ses clés le jour $n$, alors il les oublie le jour $n+1$ avec probabilité $\dfrac{1}{10}$,
- s'il n'oublie pas ses clés le jour $n$, alors il les oublie le jour $n+1$ avec probabilité $\dfrac{4}{10}$.

1. Donner les valeurs des probabilités $P_{E_n}(E_{n+1})$ et $P_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$.
2. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier $n\geqslant 1$,
$$p_{n+1}=\frac{4}{10}-\frac{3}{10}p_n.$$
3. À l'aide des résultats de la Partie A, donner l'expression de $p_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 16** ($\star\star\star\star$) – Soit $a\in\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$. Dans une bourse de valeurs, un titre donné peut monter, rester stable ou baisser. Le premier jour, le titre est stable.

- Si un jour $n$ le titre monte, le jour $n+1$ il montera avec la probabilité $1-2a$, restera stable avec la probabilité $a$ et baissera avec la probabilité $a$.
- Si un jour $n$ le titre est stable, le jour $n+1$ il montera avec la probabilité $a$, restera stable avec la probabilité $1-2a$ et baissera avec la probabilité $a$.
- Si un jour $n$ le titre baisse, le jour $n+1$ il montera avec la probabilité $a$, restera stable avec la probabilité $a$ et baissera avec la probabilité $1-2a$.

On note $M_n$ (resp. $S_n$, resp. $B_n$) l'événement "le titre monte (resp. reste stable, resp. baisse) le jour $n$". On pose $p_n=P(M_n)$, $q_n=P(S_n)$ et $r_n=P(B_n)$.

1. Expliciter $p_{n+1}$ et $q_{n+1}$, en fonction de $p_n$, $q_n$ et $r_n$.
2. Que vaut $p_n+q_n+r_n$ ? En déduire l'expression de $r_n$ en fonction de $p_n$ et $q_n$.
3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,
$$p_{n+1}=(1-3a)p_n+a \quad \text{et} \quad q_{n+1}=(1-3a)q_n+a.$$
4. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n=p_n-\dfrac{1}{3}$.
   a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison $(1-3a)$ et préciser son premier terme.
   b) En déduire que pour tout entier $n\geqslant 1$,
$$p_n=\frac{1}{3}\left(1-(1-3a)^{n-1}\right),\qquad q_n=\frac{1}{3}\left(1+2(1-3a)^{n-1}\right)\quad\text{et}\quad r_n=\frac{1}{3}\left(1-(1-3a)^{n-1}\right).$$

**Exercice 17** ($\star\star\star$) – On étudie le comportement d'un consommateur $M$ à partir d'une semaine donnée (appelée "semaine 1"). Ce consommateur choisit chaque semaine chez son pâtissier un dessert parmi les trois desserts $A$, $B$ et $C$. On considère en outre que

- si $M$ a choisi le dessert $A$ la semaine $n$, alors la semaine $n+1$ il choisit le dessert $A$ avec probabilité $\dfrac{1}{3}$ ou le dessert $C$ avec probabilité $\dfrac{2}{3}$,
- si $M$ a choisi le dessert $B$ la semaine $n$, alors la semaine $n+1$ il choisit le dessert $A$ avec probabilité $\dfrac{1}{3}$ ou le dessert $B$ avec probabilité $\dfrac{2}{3}$,
- si $M$ a choisi le dessert $C$ la semaine $n$, il reprend le dessert $C$ la semaine $n+1$,
- le consommateur choisit de manière équiprobable son dessert la première semaine.

On note pour tout entier naturel non nul $n$,

- $A_n$ l'événement : "$M$ a choisi le dessert $A$ la $n$-ième semaine",
- $B_n$ l'événement : "$M$ a choisi le dessert $B$ la $n$-ième semaine",
- $C_n$ l'événement : "$M$ a choisi le dessert $C$ la $n$-ième semaine".

1. Donner $P(A_1)$, $P(B_1)$, $P(C_1)$, ainsi que les probabilités $P_{A_n}(A_{n+1})$, $P_{A_n}(B_{n+1})$, $P_{A_n}(C_{n+1})$, $P_{B_n}(A_{n+1})$, $P_{B_n}(B_{n+1})$, $P_{B_n}(C_{n+1})$, $P_{C_n}(A_{n+1})$, $P_{C_n}(B_{n+1})$ et $P_{C_n}(C_{n+1})$.
2. À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier avec soin que
$$P(A_{n+1})=\frac{1}{3}P(A_n)+\frac{1}{3}P(B_n).$$
   Donner de même des relations exprimant $P(B_{n+1})$ et $P(C_{n+1})$ en fonction de $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$.

**Exercice 18 (⋆) –** On lance un dé à six faces parfaitement équilibré. Justifier l'indépendance des événements $A$ : "on obtient le tirage 2, 4 ou 6" et $B$ "on obtient le tirage 3 ou 6".

**Exercice 19 (⋆ ⋆ ⋆) –** Dans une population de 10000 personnes, il y a 45% de fumeurs et 35% de personnes atteintes de bronchite. De plus, 65% des personnes ayant une bronchite sont fumeurs.

1. On choisit une personne au hasard dans cette population. Calculer la probabilité des événements suivants :
   - $E_1$ : "la personne choisie fume et a une bronchite",
   - $E_2$ : "la personne choisie ne fume pas et a une bronchite",
   - $E_3$ : "la personne choisie ne fume pas et n'a pas de bronchite".
2. Fumer et avoir une bronchite sont-ils des événements indépendants ?
3. On choisit une personne au hasard parmi les fumeurs. Calculer la probabilité que cette personne ait une bronchite.

**Exercice 20 (⋆⋆) –** Dans une ville comprenant deux arrondissements $A$ et $B$, la probabilité pour une entreprise de faire l'objet d'un contrôle fiscal est de $\frac{1}{4}$ dans l'arrondissement $A$ et de $\frac{1}{5}$ dans l'arrondissement $B$. On suppose que ces deux événements sont indépendants.
Un groupe financier possède un hypermarché implanté dans l'arrondissement $A$ et un autre dans l'arrondissement $B$. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

- $E_1$ : "les deux hypermarchés sont contrôlés",
- $E_2$ : "au moins l'un des hypermarchés est contrôlés",
- $E_3$ : "un hypermarché et un seul est contrôlé",
- $E_4$ : "aucun des deux hypermarchés n'est contrôlé".

**Exercice 21 (⋆⋆) –** Un archer tire sur une cible située à 20m et une autre cible située à 50m. Il effectue trois tirs en changeant de cible à chaque fois. La probabilité d'atteindre la cible à 20m (resp. 50m) est d'une chance sur trois (resp. une chance sur quatre). On suppose que les trois tirs sont indépendants. L'archer gagne s'il atteint deux cibles consécutivement.
Calculer la probabilité de gagner en commençant par la cible située à 20m et en commençant par la cible située à 50m. Par quelle cible a-t-il intérêt à commencer ?