Exercices — Chapitre 4

Exercice 1 (⋆) – On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = 5\sqrt{n} - 3 \quad \text{et} \quad v_n = -\frac{2}{n+1} + 1.$$

1. Calculer les deux premiers termes de chaque suite.
2. Calculer le quinzième terme de chaque suite.

Exercice 2 (⋆) – On considère les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = -u_n^2 + u_n - 1 \qquad \text{et} \qquad v_1 = 5 \text{ et } v_{n+1} = v_n + \frac{2}{n}.$$

Calculer les quatre premiers termes de ces deux suites.

Exercice 3 (⋆) – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - n + 1$.

1. Calculer u_0 et u_{10}.
2. Exprimer $u_n + 1$ et u_{n+1} en fonction de n.

Exercice 4 (⋆) – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = \frac{1}{2}$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer u_{10}.

Exercice 5 (⋆⋆) – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

1. On donne $u_0 = \frac{1}{2}$ et $r = -\frac{1}{4}$. Calculer u_{13}.
2. On donne $u_{36} = 86$ et $r = 2$. Calculer u_0.
3. On donne $u_2 = 2$ et $u_{15} = 67$. Calculer r et u_1.
4. On donne $u_8 = 34$ et $r = 3$. Calculer u_1.

Exercice 6 (⋆) – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison $q = 3$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer u_5.

Exercice 7 (⋆⋆) – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q.

1. On donne $u_0 = 8$ et $q = \frac{1}{2}$. Calculer u_7.
2. On donne $u_1 = 2$ et $q = \frac{3}{2}$. Calculer u_5.
3. On donne $u_4 = 7$ et $q = \frac{1}{3}$. Calculer u_1.
4. On donne $u_2 = 4$ et $u_4 = \frac{16}{9}$. Calculer q. *(On suppose $q > 0$.)*

Exercice 8 (⋆⋆) – On suppose que chaque année, la production d'une usine subit une baisse de 4%. Au cours de l'année 2020, la production a été de 25000 unités.

1. On note $P_0 = 25000$ et P_n la production au cours de l'année $2020 + n$.
   Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison.
2. Calculer la production de l'usine en 2025.
   Indication numérique : $0.96^5 \approx 0.82$.

Exercice 9 (⋆⋆) – On place un capital $u_0 = 1500$ euros à 4.5% par an avec intérêts simples. On note u_n le capital obtenu au bout de n années.

1. Donner la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer la valeur du capital au bout de 10 ans.
3. Au bout de combien d'années, le capital initial aura-t-il doublé ?

Exercice 10 (⋆⋆) – On place un capital $u_0 = 3500$ euros à 3% par an avec intérêts composés. On note u_n le capital obtenu au bout de n années.

1. Donner la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer la valeur du capital au bout de 10 ans.
   Indication numérique : $1.03^{10} \approx 1.34$.

Exercice 11 (⋆⋆⋆) – On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + 2u_n$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle arithmétique ? géométrique ?
3. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n + 1$.
   a) Calculer v_0, v_1, v_2, v_3 et v_4.
   b) Justifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
   c) Donner l'expression de v_n en fonction de n.
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 12 (⋆⋆⋆) – La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes le 2 janvier 2020 et a enregistré 2500 inscriptions en 2020. On estime que, chaque année, 80% des anciens inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 400 nouveaux adhérents. On modélise cette situation par une suite numérique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note $a_0 = 2500$ le nombre d'inscrits à la médiathèque en 2020 et a_n le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année $2020 + n$.

1. a) Calculer a_1 et a_2.
   b) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a la relation $a_{n+1} = 0.8 \times a_n + 400$.
2. On pose pour tout entier naturel n, $u_n = a_n - 2000$.
   a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 0.8$ et de premier terme $u_0 = 500$.
   b) En déduire que le terme général de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $a_n = 500 \times 0.8^n + 2000$.

Exercice 13 (⋆⋆) – Exprimer à l'aide du symbole Σ les expressions suivantes.

1. $S_1 = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^{12}$
2. $S_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{4}{16} + \cdots + \dfrac{10}{1024}$
3. $S_3 = a + \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^3}{3} + \cdots + \dfrac{a^n}{n}$
4. $S_4 = 2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + 50$
5. $S_5 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 13^2 + 14^2$
6. $S_6 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125$

Exercice 14 (⋆⋆) – Développer chacune des sommes écrites à l'aide du symbole Σ, en faisant disparaître ce symbole.

1. $T_1 = \displaystyle\sum_{k=3}^{10} \frac{1}{k^2}$
2. $T_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2k+1}$

Exercice 15 (⋆⋆⋆) –

1. Calculer la somme
$$S = -2 + 2 + 6 + 10 + \cdots + 98 + 102 + 106.$$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = \dfrac{1}{2}$. Calculer
$$T = \sum_{k=0}^{10} u_k.$$

Exercice 16 (⋆⋆⋆) – Calculer les sommes S et T.

1. $S = 2 + 6 + 18 + \cdots + 118098$
2. $T = 2 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{9} + \cdots + \dfrac{2}{59049}$

Exercice 17 (⋆⋆⋆) – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$. Calculer S_{10}.

Exercice 18 (⋆⋆⋆) – Une entreprise propose pour recruter un nouvel employé un salaire annuel de 21000 euros avec augmentation annuelle du salaire de 4% tous les ans.
On note s_n le salaire annuel pour l'année n. On a donc $s_1 = 21000$.

1. Calculer s_2 et s_3.
2. Donner la nature de la suite $(s_n)_{n\geqslant 1}$ et exprimer s_n en fonction de n.
3. Justifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} s_k \approx 115500$.
   Indication numérique : $1.04^5 \approx 1.22$.
4. Si cet employé reste 20 ans dans l'entreprise, calculer la somme des salaires perçus durant ces 20 ans. En déduire son salaire annuel moyen sur ces 20 ans.
   Indication numérique : $1.04^{20} \approx 2.19$.