Exercices — Chapitre 3

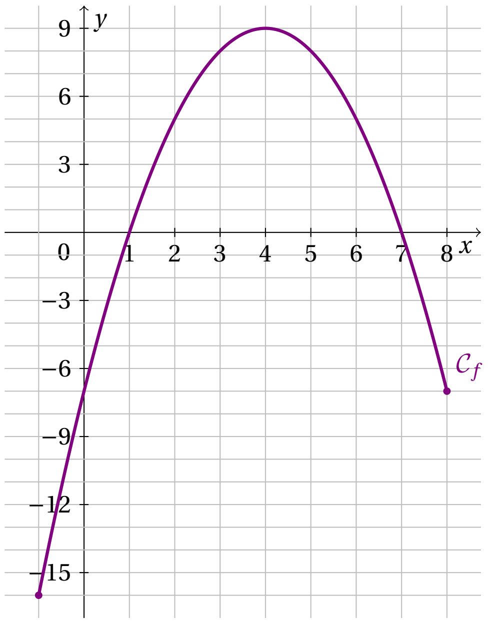
Exercice 1 ($\star$) – Déterminer, dans chacun des cas,

1. l'image de -2, 0 et 3 par la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$,
2. l'image de -3, 0 et 1 par la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ par $g(x) = \dfrac{4x+1}{2x-3}$,
3. l'image de -1, 0 et 3 par la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (2x-5)(3x+1)$.

Exercice 2 ($\star\star$) – Déterminer, dans chacun des cas et s'ils existent,

1. les antécédents de 2, -1 et 0 par la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x$,
2. les antécédents de 2, -1 et 0 par la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 5x + 1$,
3. les antécédents de 2 et 0 par la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x^2 + 1$,
4. les antécédents de 2, -1 et 0 par la fonction i définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$ par $i(x) = \dfrac{2x+1}{3x-2}$,
5. les antécédents de 5 et 1 par la fonction j définie sur $\mathbb{R}$ par $j(x) = x^2 + 5x + 5$.

Exercice 3 ($\star$) – Sur la figure ci-dessous, on donne la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f. Déterminer graphiquement (aucune justification n'est demandée),



1. l'image de 3 par f,
2. $f(8)$ et $f(0)$,
3. l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 5,
4. les éventuels antécédents de -7 par f,
5. les solutions de l'équation $f(x) = 0$,
6. le tableau de signe de $f(x)$,
7. le tableau de variation de f,
8. le maximum de f et pour quelle valeur il est atteint,
9. les solutions de l'inéquation $f(x) > 5$.

Exercice 4 ($\star$) – Étudier la parité de la fonction f dans chacun des cas suivants.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x$
2. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$
3. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x$
4. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{2x^2+3}$
5. f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ par $f(x) = \dfrac{3}{x^2-4}$
6. f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$
7. f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

Exercice 5 ($\star\star$) – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

1. Étudier la parité de f.
2. On admet que f est décroissante sur $[0, +\infty[$.
   En déduire, grâce à la question précédente, le sens de variation de f sur $]-\infty, 0]$.
   Dresser alors le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que pour tout réel x, $\quad 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Exercice 6 ($\star$) – Tracer une courbe susceptible de représenter graphiquement la fonction f, dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	-3		0		2		4
f	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

Exercice 7 ($\star\star$) – Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, dont le tableau de variation est donné ci-dessous. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

x	0		2		$+\infty$
f	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	

1. f est croissante sur $[-1, 3]$
2. f est décroissante sur $[2, +\infty[$
3. $f(2) \leqslant f(3)$
4. $f(1) \geqslant f(2)$
5. $\forall x \in [0, 2], \quad f(x) \leqslant 1$
6. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \leqslant 3$
7. $\exists x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) < 0$
8. $\exists x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = 4$

Exercice 8 (⋆⋆) – Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Pour chacune des implications suivantes, dire si celle-ci est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

1. Si f est croissante sur $[0,2]$, alors f est croissante sur $[0,1]$.
2. Si $f(0) < f(1)$, alors f est croissante sur $[0,1]$.
3. Si f a un maximum en 1 sur $[0,1]$, alors f est croissante sur $[0,1]$.
4. Si f n'est pas croissante sur $[0,1]$, alors f est décroissante sur $[0,1]$.

Exercice 9 (⋆⋆) – Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{3+2x^3}$.
Montrer que
$$\forall x \in [-1,1], \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant 1.$$

Exercice 10 (⋆⋆) – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$.
Montrer que la fonction f est majorée par 2. En déduire que f est bornée.

Exercice 11 (⋆⋆) –

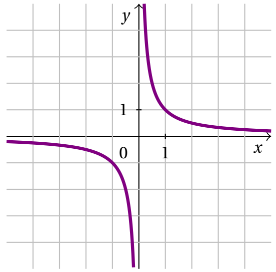
1. Donner le domaine de définition ainsi que l'expression des fonctions $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$ et $g\circ g$ pour les fonctions f et g définies ci-dessous.
   a) $f(x) = 2x^2 - x$ et $g(x) = 3x+2$,
   b) $f(x) = 1 - x^3$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$,
   c) $f(x) = \sqrt{2x+3}$ et $g(x) = x^2+2$.
2. Donner le domaine de définition des fonctions h suivantes et les mettre sous la forme d'une composée $f\circ g$, où les fonctions f et g sont à définir.
   a) $h(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4}$,
   b) $h(x) = \sqrt{x^2+1}$.

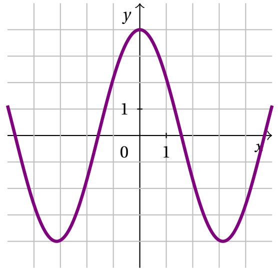
Exercice 12 (⋆⋆⋆) – Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes.

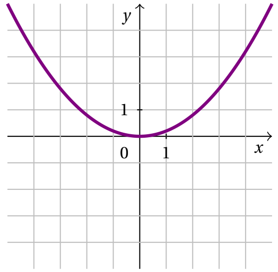
1. $a(x) = x^4 - 5x^2 + 2x + 1$
2. $b(x) = x + \sqrt{x}$
3. $c(x) = \dfrac{16x^2 - 2x + 8}{x^2+5x+6}$
4. $d(x) = \sqrt{x^2+3x-10}$
5. $e(x) = \dfrac{x+6}{x^2+5x+1}$
6. $f(x) = \sqrt{3x-2}$
7. $g(x) = \dfrac{8x^2-5x+3}{x^2-5x+6}$
8. $h(x) = \sqrt{x^2-3x-18}$
9. $j(x) = \dfrac{1}{x} + \sqrt{x}$
10. $k(x) = \sqrt{x+7} + \sqrt{2x^2-3x-9}$
11. $l(x) = \dfrac{x^2+5x-7}{\sqrt{2x^2+3x-2}}$
12. $m(x) = \sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$

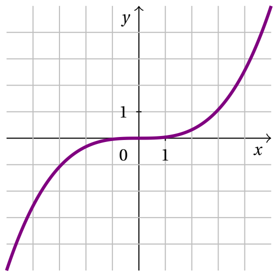
Exercice 13 (⋆⋆) – Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x+4$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

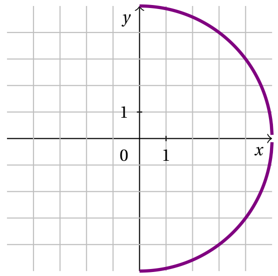
Exercice 14 (⋆) – Conjecturer, d'après les graphes, si les fonctions suivantes sont bijectives. On précisera bien les ensembles de départ et d'arrivée.

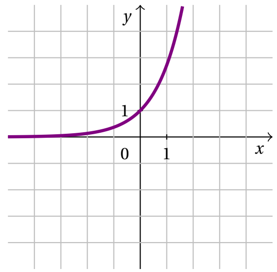
1.


2.


3.


4.


5.


6.


Exercice 15 (⋆⋆) – Soit f la fonction $f : \begin{array}{rcl} [1,+\infty[& \to & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2-1 \end{array}$. f est-elle bijective ?