

EXERCICES — CHAPITRE 2

Exercice 1 (★) – Parmi la liste de nombres $\left\{0, 1, \frac{3}{2}, 4\right\}$, lesquels sont solutions des équations suivantes?

| | | |
|-----------------|----------------------|--------------------|
| 1. $-x + 1 = 0$ | 2. $3x + 4 = 6x - 8$ | 3. $x(2x - 3) = 0$ |
|-----------------|----------------------|--------------------|

Exercice 2 (★) – Résoudre les équations suivantes.

| | | |
|------------------|------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $x - 9 = -4$ | 5. $\frac{1}{4}x = 16$ | 8. $\frac{3x}{4} = \frac{2}{3}$ |
| 2. $-x + 5 = 12$ | 6. $5x - 9 = 3x + 4$ | 9. $\frac{4}{5}x + 4 = -\frac{2}{3}$ |
| 3. $3x = -24$ | 7. $x - \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$ | |
| 4. $3.7x = 0$ | | |

Exercice 3 (★★) – Développer chaque membre puis résoudre les équations obtenues.

| | |
|--|---|
| 1. $4x - 5(3 - 2x) = 4 - (2x - 7)$ | 3. $7 - 3(4 - 2x) - 5(2 - 3(x - 5)) = 4 - 3(x - 4)$ |
| 2. $9x - 3(4 - 3x) = 2 - (35 - 3(4 - 2x))$ | 4. $4(x - 2) - 3(6 - 2(3 - 4x)) + 3(7 - 2x) = 0$ |

Exercice 4 (★★) – Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes.

| | |
|--------------------|--------------------------|
| 1. $2x + 3 > 0$ | 3. $2x - 1 \geq -2x + 3$ |
| 2. $3 - 5x \leq 0$ | 4. $x - 2 < 2x + 1$ |

Exercice 5 (★★) – Déterminer les solutions des équations suivantes.

| | | |
|-----------------------|--|-----------------------------|
| 1. $x^2 - 2x + 1 = 0$ | 4. $4x^2 + 8x - 5 = 0$ | 7. $2x^2 - x - 4 = x^2 + 8$ |
| 2. $x^2 - 1 = 0$ | 5. $3x^2 + x + 6 = 0$ | 8. $x(x - 1) = -2(3x + 7)$ |
| 3. $x^2 + 1 = 0$ | 6. $\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4} = 0$ | |

Exercice 6 (★★) – Étudier le signe des expressions suivantes.

| | | |
|-------------------|--------------------|-------------------|
| 1. $x^2 - 2x + 1$ | 3. $x^2 + 1$ | 5. $2x^2 + x + 3$ |
| 2. $x^2 - 1$ | 4. $3x^2 - 5x + 2$ | 6. $-x^2 + 4$ |

Exercice 7 (★★) – Résoudre les inéquations suivantes.

| | |
|----------------------------|---|
| 1. $x^2 - 2x + 1 > 0$ | 6. $x(2x - 5) \geq x - 6$ |
| 2. $-3x^2 + 5x - 2 \leq 0$ | 7. $\frac{-x^2}{3} + \frac{x}{3} \leq -1$ |
| 3. $x^2 - 4x - 4 \geq 0$ | 8. $4x^2 - 2x + 14 > 3x^2 + 4x + 5$ |
| 4. $-2x^2 + 5x \leq 2$ | 9. $4(x - 1) > x(3x - 4)$ |
| 5. $3x^2 \geq 2x - 1$ | |

Exercice 8 (★★★) – En effectuant le changement de variable $X = x^2$, résoudre les équations suivantes.

| | | |
|---------------------------|-----------------------------|----------------------------------|
| 1. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ | 3. $9x^4 - 85x^2 + 196 = 0$ | 5. $x^2 + \frac{1}{x^2} - 6 = 0$ |
| 2. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ | 4. $x^4 - x^2 - 2 = 0$ | |

Exercice 9 (★★★) – Soit m un nombre réel. On considère l'équation $4x^2 + (m - 1)x + 1 = 0$.

1. Cette équation admet-elle une solution lorsque $m = 1$?
2. Déterminer m pour que cette équation admette une unique solution. Déterminer cette solution.
3. Préciser les cas, en fonction de m , où cette équation admet deux solutions distinctes, et où cette équation n'admet aucune solution.

Exercice 10 (★★) – Soit $P(x)$ le polynôme défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = x^3 - 7x^2 + 11x - 2.$$

1. Déterminer une racine évidente du polynôme $P(x)$.
2. En déduire une factorisation du polynôme $P(x)$.

Exercice 11 (★★) – Soit $P(x)$ le polynôme défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4.$$

1. Déterminer une racine évidente du polynôme $P(x)$.
2. En déduire une factorisation du polynôme $P(x)$.

Exercice 12 (★★★) – Factoriser au maximum les polynômes suivants.

| | |
|--------------------------------------|---|
| 1. $P(x) = x^3 + 7x^2 + 7x - 15$ | 5. $T(x) = -x^3 + x^2 + 16x + 20$ |
| 2. $Q(x) = 6x^3 + 7x^2 - x - 2$ | 6. $U(x) = x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 4x$ |
| 3. $R(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$ | 7. $V(x) = 6x^3 + 5x^2 - 2x - 1$ |
| 4. $S(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ | |

Exercice 13 (★★) – Résoudre dans \mathbb{R} l'équation

$$2x^3 - 3x^2 + 5x - 4 = 0.$$

Exercice 14 (★★★) – Soit $f(x)$ le polynôme défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 4x + 30.$$

1. Montrer qu'il existe deux réels a et b à déterminer tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x^2 - 2)(x^2 + ax + b).$$

2. En déduire les racines de $f(x)$.

Exercice 15 (★★★) – Soit $f(x)$ le polynôme défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^4 + 12x^3 + 18x^2 - 140x - 147.$$

1. Vérifier que -1 et 3 sont des solutions de $f(x) = 0$.

En déduire qu'il existe un polynôme $h(x)$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x+1)(x-3)h(x).$$

2. Déterminer $h(x)$ et résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 16 (★) – Résoudre les équations suivantes.

$$1. (x-1)(x+2) = 0$$

$$4. -3(x-1) = 0$$

$$2. (2x+4)(3x-1) = 0$$

$$5. (x+1)(3x-4)(2x-3) = 0$$

$$3. (2+x)(2-3x) = 0$$

$$6. \sqrt{2}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) = 0$$

Exercice 17 (★★) – Factoriser puis résoudre les équations suivantes.

$$1. (5x-2)(x+7) + (5x-2)^2 = 0$$

$$3. (2x+3)^2 - (x+5)(2x+3) = 0$$

$$2. -2(3x-5) + (x+7)(3x-5) = 0$$

$$4. (3x-2)^2 - 81 = 0$$

Exercice 18 (★★) – Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes.

$$1. (x-1)(-2x+4) \geq 0$$

$$3. (x-1)(x^2 - 10x + 21) \geq 0$$

$$2. (2x-1)(x+3) < 0$$

$$4. (-3x-1)(x^2 - 2x + 1) < 0$$

Exercice 19 (★★★) – Résoudre les équations suivantes.

$$1. \frac{7}{x+1} = \frac{2}{x}$$

$$4. \frac{3}{x} = \frac{x-1}{x+1}$$

$$2. \frac{x+1}{x+2} + \frac{3}{x-2} = \frac{4}{x^2-4}$$

$$5. 2x = \frac{3x-5}{x-2}$$

$$3. \frac{-2x-1}{x+1} = \frac{2x-3}{1-x}$$

$$6. \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} = \frac{1}{4}$$

Exercice 20 (★★) – Résoudre les inéquations suivantes.

$$1. \frac{2x+3}{-x+1} \leq 0$$

$$2. \frac{x^2-6x+8}{-x+3} \geq 0$$

Exercice 21 (★★) – Soit $f(x) = x + \frac{16}{x}$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) \geq 8.$$