2 Équations et inéquations

I – Vocabulaire

Définition 2.1 – Une **équation** est un *problème* mettant en jeu une **égalité** du type

$$f(x) = 0,$$

où f est une fonction à variable réelle et le réel x est appelé **inconnue** de l'équation.
On dit que l'on **résout** cette équation lorsque l'on recherche l'ensemble des x tels que $f(x) = 0$.
On note généralement l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\right\}.$$

Exemple 2.2 – Résoudre l'équation $2x + 7 = 0$.

$$2x+7=0 \iff 2x=-7 \iff x=-\frac{7}{2}$$

Ainsi $\mathcal{S} = \left\{-\frac{7}{2}\right\}$.

Définition 2.3 – Une inéquation est un *problème* mettant en jeu une **inégalité** du type

$$f(x) \geqslant 0 \quad \big(\text{ou} \quad f(x) \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad f(x) > 0 \quad \text{ou} \quad f(x) < 0\big),$$

où f est une fonction à variable réelle et le réel x est appelée **inconnue** de l'inéquation.
On dit que l'on **résout** cette inéquation lorsque l'on recherche l'ensemble des x tels que $f(x) \geqslant 0$ (ou $f(x) \leqslant 0, \ldots$). On note généralement l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geqslant 0\right\}.$$

Exemple 2.4 –

- Résoudre l'inéquation $3x + 4 \geqslant 0$.

$$3x+4 \geqslant 0 \iff 3x \geqslant -4 \iff x \geqslant -\frac{4}{3}$$

Ainsi $\mathcal{S} = \left[-\frac{4}{3}, +\infty\right[$.

- Résoudre l'inéquation $-3x + 5 > 0$.

$$-3x+5>0 \iff -3x>-5 \iff x<\frac{-5}{-3}=\frac{5}{3}$$

Ainsi $\mathcal{S} = \left]-\infty, \frac{5}{3}\right[$.

ATTENTION ! Lorsque l'on multiplie ou divise par un réel **négatif** dans une inégalité, il ne faut pas oublier de **changer le sens de l'inégalité** !

II – Équations de degré 1

1 – Résolution de l'équation $ax + b = 0$

Proposition 2.5

Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$. L'équation $ax + b = 0$ admet pour unique solution

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Démonstration.

$$ax + b = 0 \iff ax = -b \iff x = -\frac{b}{a}$$

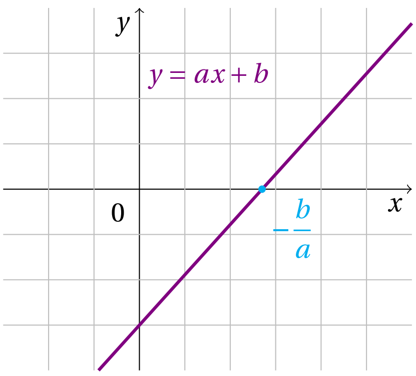
□

2 – Signe de $ax + b$

L'expression $ax + b$ change de signe au point où elle s'annule. On obtient alors deux tableaux de signe, selon le signe de a.

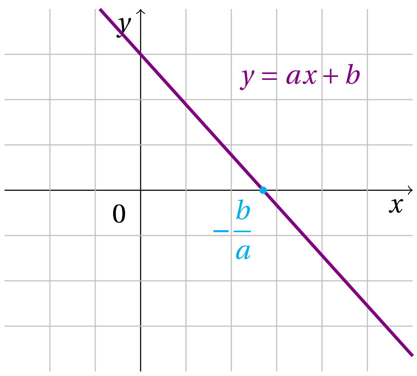
Cas $a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	



Cas $a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	



Démonstration. Déjà, $ax + b \geqslant 0 \iff ax \geqslant -b$.
Il faut maintenant diviser par a et donc distinguer deux cas, selon le signe de a.

- **Cas $a > 0$:** Dans ce cas, on peut écrire $ax \geqslant -b \iff x \geqslant -\frac{b}{a}$
et on obtient donc le tableau de signe ci-dessus.
- **Cas $a < 0$:** Dans ce cas, il faut changer le sens de l'inégalité lorsque l'on divise par a et donc $ax \geqslant -b \iff x \leqslant -\frac{b}{a}$ et on obtient le tableau de signe ci-dessus.

□

Remarque 2.6 – Plutôt que d'apprendre par cœur ces résultats, il est vivement conseillé de savoir **retrouver** les résultats précédents à partir de la résolution de l'inéquation $ax + b \geqslant 0$ (par exemple) ou de la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto ax + b$.

Exemple 2.7 – Donner le signe de l'expression $-2x+3$.

$$-2x+3 \geqslant 0 \iff -2x \geqslant -3 \iff x \leqslant \frac{-3}{-2} \iff x \leqslant \frac{3}{2}$$

J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x+3$		$+$	0	$-$	

III – Équations de degré 2

1 – Résolution de l'équation $ax^2+bx+c=0$

Définition 2.8 – Soient a, b et c des réels avec $a \neq 0$. On appelle **discriminant** du polynôme de degré 2 ax^2+bx+c le réel noté Δ défini par

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Théorème 2.9

Soient a, b et c des réels avec $a \neq 0$. Trois cas sont possibles selon le signe du discriminant :

- Si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet **aucune** solution réelle.
- Si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet **une unique** solution réelle : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet **deux** solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Exemple 2.10 – Résoudre les équations suivantes.

- $x^2+2x+1=0$
  Je commence par calculer le discriminant : $\Delta = 2^2 - 4\times1\times1 = 4-4 = 0$.
  Il y a donc une unique solution :
  $$x_0 = \frac{-2}{2\times1} = -1.$$
- $x^2-5x+6=0$
  Je commence par calculer le discriminant : $\Delta = (-5)^2 - 4\times1\times6 = 25-24 = 1 > 0$.
  Il y a donc deux solutions :
  $$x_1 = \frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times1} = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$
- $x^2+x+1=0$.
  Je commence par calculer le discriminant : $\Delta = 1^2 - 4\times1\times1 = 1-4 = -3 < 0$.
  Il n'y a donc pas de solution.

Proposition 2.11 – Factorisation du polynôme $ax^2 + bx + c$

Soient a, b et c des réels avec $a \neq 0$. Trois cas sont possibles selon le signe du discriminant :

- Si $\Delta < 0$, on ne peut pas factoriser le polynôme $ax^2 + bx + c$.
- Si $\Delta = 0$, le polynôme admet une racine **double** x_0 et alors

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

- Si $\Delta > 0$, le polynôme admet deux racines distinctes x_1 et x_2 et alors

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Exemple 2.12 – Factoriser les polynômes de l'exemple précédent.

- $x^2 + 2x + 1 = \left(x - (-1)\right)^2 = (x+1)^2$
- $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$
- $x^2 + x + 1$ ne peut pas être factorisé puisque son discriminant est négatif.

Remarque 2.13 – Factoriser le polynôme $ax^2 + bx + c$ revient donc à déterminer ses racines et réciproquement, on peut lire les racines d'un polynôme sur sa forme factorisée.

2 – Signe de $ax^2 + bx + c$

Le signe du polynôme $ax^2 + bx + c$ dépend **à la fois** du signe du discriminant Δ **ET** du signe de a. Dès lors, il y a six cas :

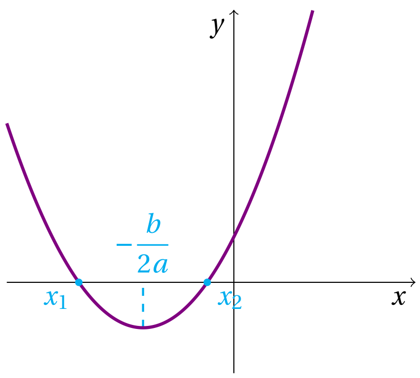
- Si $\Delta > 0$, on note x_1 et x_2 les racines de sorte que $x_1 < x_2$ et on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		signe de a		signe de a		signe de a	
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$a(x-x_1)(x-x_2)$		signe de a	0	- signe de a	0	signe de a	

En résumé, on obtient les tableaux de signe et représentations graphiques suivants.

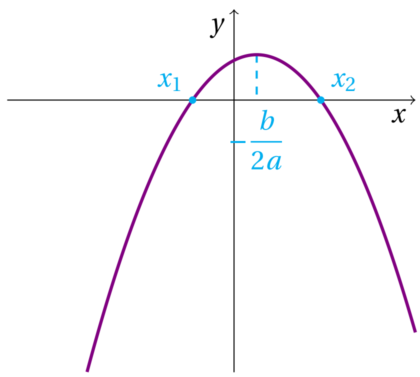
Cas $a > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		$+$	0	$-$	0	$+$	



Cas $a < 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		$-$	0	$+$	0	$-$	



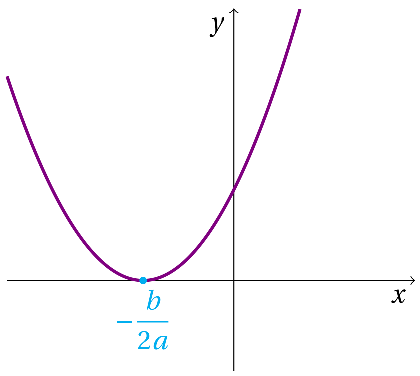
- Si $\Delta = 0$, on note x_0 la racine double et on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
a	signe de a		signe de a
$(x-x_0)^2$	$+$	0	$+$
$a(x-x_0)^2$	signe de a	0	signe de a

En résumé, on obtient les tableaux de signe et représentations graphiques suivants.

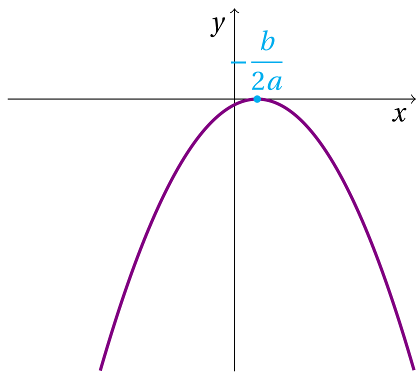
Cas $a > 0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
ax^2+bx+c	$+$	0	$+$



Cas $a < 0$

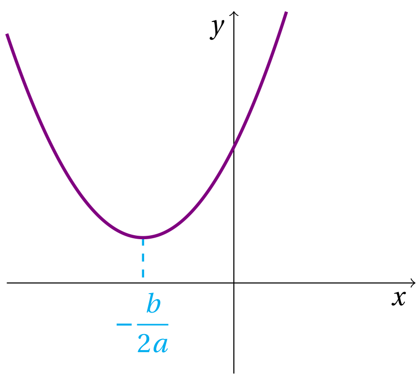
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
ax^2+bx+c	$-$	0	$-$



- Si $\Delta < 0$, le signe de ax^2+bx+c reste constant et est le même que celui de a. On obtient les tableaux de signe et représentations graphiques suivantes.

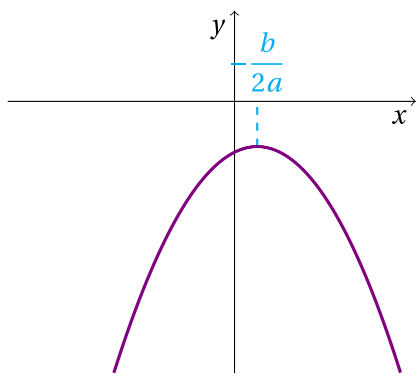
Cas $a > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
ax^2+bx+c	$+$	



Cas $a < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
ax^2+bx+c	$-$	



Exemple 2.14 –

- Résoudre l'inéquation $x^2 - 7x + 10 \leqslant 0$.
  Je calcule le discriminant :
  $$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 49 - 40 = 9 > 0.$$
  Il y a donc deux solutions :
  $$x_1 = \frac{-(-7) - \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{7-3}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-7) + \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{7+3}{2} = 5.$$
  J'établis ensuite le tableau de signe. Il s'agit du cas $\Delta > 0$ et $a > 0$.

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$x^2 - 7x + 10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

  D'après le tableau de signe, je vois que $x^2 - 7x + 10 \leqslant 0$ pour $x \in [2,5]$ donc
  $$\mathcal{S} = [2,5].$$

- Résoudre l'inéquation $x^2 + 2x + 1 > 0$.
  Je calcule le discriminant :
  $$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4 - 4 = 0.$$
  Il y a donc une seule solution :
  $$x_0 = \frac{-2}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1.$$
  J'établis ensuite le tableau de signe. Il s'agit du cas $\Delta = 0$ et $a > 0$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x^2 + 2x + 1$		$+$	0	$+$	

  D'après le tableau de signe, je vois que $x^2 + 2x + 1 > 0$ pour $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$, aussi noté $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donc
  $$\mathcal{S} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

IV – Polynômes

1 – Polynômes de degré n

Définition 2.15 – On appelle **polynôme de degré n** toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \qquad \text{avec } a_n \neq 0.$$

Les réels a_0, a_1, …, a_n sont appelés les **coefficients** de P et n est le **degré** de P, noté $n = \deg(P)$.

Exemple 2.16 –
- $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3$ est un polynôme de degré 3 dont les coefficients sont 1, 2, −5 et 3.
- $Q(x) = x^4 + 1$ est un polynôme de degré 4 dont les coefficients sont 1, 0, 0, 0 et 1.
- $R(x) = -3$ est un polynôme de degré 0 dont l'unique coefficient est −3.

Il est possible d'additionner et de multiplier des polynômes.
- Pour former la **somme** de deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$, on regroupe les termes de même degré de $P(x)$ et de $Q(x)$.
- Pour former le **produit** de deux polynômes, il suffit de développer le produit littéral correspondant et de rassembler les termes de même degré.

Exemple 2.17 – Soient $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$ et $Q(x) = -7x^3 + x^2 + \sqrt{2}$.
- $P(x) + Q(x) = 3x^2 - 5x + 2 - 7x^3 + x^2 + \sqrt{2} = -7x^3 + 4x^2 - 5x + 2 + \sqrt{2}$
- $P(x)Q(x) = \left(3x^2 - 5x + 2\right)\left(-7x^3 + x^2 + \sqrt{2}\right)$
  $= -21x^5 + 3x^4 + 3\sqrt{2}x^2 + 35x^4 - 5x^3 - 5\sqrt{2}x - 14x^3 + 2x^2 + 2\sqrt{2}$
  $= -21x^5 + 38x^4 - 19x^3 + \left(2 + 3\sqrt{2}\right)x^2 - 5\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}$

Proposition 2.18 – Égalité de deux polynômes

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes. Ces deux polynômes sont égaux si et seulement si
1. Ils sont de même degré, *i.e.* $\deg(P) = \deg(Q)$.
2. **TOUS** les coefficients des termes de même degré de $P(x)$ et $Q(x)$ sont égaux.

Exemple 2.19 – Soient les deux polynômes $P(x) = \left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)$ et $Q(x) = x^4 + 1$.
Montrer que $P(x)$ et $Q(x)$ sont égaux.
Je vais développer le polynôme $P(x)$ et espérer retrouver $Q(x)$.

$$\begin{aligned} P(x) &= \left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right) \\ &= x^4 - \sqrt{2}x^3 + x^2 + \sqrt{2}x^3 - 2x^2 + \sqrt{2}x + x^2 - \sqrt{2}x + 1 \\ &= x^4 + 1 = Q(x) \end{aligned}$$

J'ai bien montré que $P(x) = Q(x)$.

Définition 2.20 – Un quotient de polynômes $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est appelé une **fraction rationnelle**.

Exemple 2.21 –

- $\dfrac{x^2+1}{2x-3}$ est une fraction rationnelle.
- $\dfrac{x^2+2x-1}{x^3+4}$ est une fraction rationnelle.
- $\dfrac{2}{x+3}$ est une fraction rationnelle.

2 – Racine d'un polynôme

Définition 2.22 – On appelle **racine** d'un polynôme $P(x)$ toute solution x_0 de l'équation $P(x_0)=0$.

Exemple 2.23 –

- 2 est une racine du polynôme $P(x)=x^2-5x+6$ puisque $P(2)=2^2-5\times 2+6=4-10+6=0.$
- $\dfrac{3}{2}$ est une racine du polynôme $Q(x)=2x-3$ puisque $Q\left(\dfrac{3}{2}\right)=2\times\dfrac{3}{2}-3=3-3=0.$
- -2 est une racine du polynôme $R(x)=x^3+8$ puisque $R(-2)=(-2)^3+8=-8+8=0.$

Remarque 2.24 – Pour trouver des racines, on peut essayer de remplacer la variable x par de petites valeurs, comme -1, 1, 0, etc. Si on trouve 0, alors on dit que l'on a trouvé une "racine évidente".

Théorème 2.25

Soient $P(x)$ un polynôme et α un réel. Le nombre α est une racine de $P(x)$ si et seulement s'il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$.

En pratique, il y a deux méthodes pour déterminer le polynôme $Q(x)$:

- par identification des coefficients, stratégie expliquée dans la Méthode 2.26,
- par division euclidienne, stratégie expliquée dans la Méthode 2.27.

Méthode 2.26 – Identification des coefficients

On considère le polynôme $P(x)$ défini par $P(x)=3x^4-x^3+x^2+11x+6$.
Une solution évidente est $x_0=-1$ car $P(-1)=3+1+1-11+6=0$. Donc $P(x)$ est un multiple de $\big(x-(-1)\big)=(x+1)$. Il existe donc un polynôme $Q(x)$, de degré $4-1=3$, tel que pour tout réel x,

$$\begin{aligned}P(x)&=(x+1)Q(x)\\&=(x+1)\big(ax^3+bx^2+cx+d\big)\\&=ax^4+bx^3+cx^2+dx+ax^3+bx^2+cx+d\\&=ax^4+(b+a)x^3+(c+b)x^2+(d+c)x+d\end{aligned}$$

Les polynômes $3x^4-x^3+x^2+11x+6$ et $ax^4+(b+a)x^3+(c+b)x^2+(d+c)x+d$ sont égaux, par définition, donc leurs coefficients le sont aussi. On obtient ainsi le système suivant

$$\left\{\begin{aligned}a&=3\\b+a&=-1\\c+b&=1\\d+c&=11\\d&=6\end{aligned}\right.\quad\text{qui amène aux solutions}\quad\left\{\begin{array}{l}a=3\\b=-1-a=-1-3=-4\\c=1-b=1-(-4)=1+4=5\\d=11-c=11-5=6\\d=6\qquad\textit{vérification}\ \checkmark\end{array}\right.$$

En conclusion, $P(x)=(x+1)\big(3x^3-4x^2+5x+6\big)$.

Méthode 2.27 – Division euclidienne

On considère le polynôme $P(x)$ défini par $P(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$.
Une solution évidente est $x_0 = 1$ car $P(1) = 1 - 7 + 17 - 17 + 6 = 0$. Donc $P(x)$ est divisible par $(x-1)$.
On effectue la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-1)$, en utilisant les mêmes principes que pour la division des nombres.

$$\begin{array}{crrrrrrrrr|l}
 & x^4 & - & 7x^3 & + & 17x^2 & - & 17x & + & 6 & x-1 \\ \cline{11-11}
- & (x^4 & - & x^3) & & & & & & & x^3-6x^2+11x-6 \\ \cline{2-10}
 & & - & 6x^3 & + & 17x^2 & - & 17x & + & 6 & \\
 & - & (- & 6x^3 & + & 6x^2) & & & & & \\ \cline{3-10}
 & & & & + & 11x^2 & - & 17x & + & 6 & \\
 & & & - & (+ & 11x^2 & - & 11x) & & & \\ \cline{5-10}
 & & & & & & - & 6x & + & 6 & \\
 & & & & & - & (- & 6x & + & 6) & \\ \cline{7-10}
 & & & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

En conclusion, $P(x) = (x-1)\left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right)$.

Exemple 2.28 – Le but de cet exemple est de factoriser $P(x) = x^3 - 7x + 6$.

1. Calculer $P(2)$.
   Je calcule $P(2) = 2^3 - 7 \times 2 + 6 = 8 - 14 + 6 = 0$.
2. Factoriser $P(x)$ de deux manières différentes.
   a) **Identification des coefficients**
   Comme $P(2) = 0$, 2 est une racine du polynôme $P(x)$, qui est donc un multiple de $(x-2)$. Ainsi il existe un polynôme $Q(x)$, de degré $3 - 1 = 2$, tel que pour tout réel x,
$$\begin{aligned} P(x) &= (x-2)Q(x) \\ &= (x-2)\left(ax^2 + bx + c\right) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c \\ &= ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c \end{aligned}$$
   Les polynômes $ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$ et x^3-7x+6 sont égaux donc leurs coefficients le sont aussi. J'obtiens ainsi le système suivant d'équations
$$\left\{\begin{aligned} a &= 1 \\ b-2a &= 0 \\ c-2b &= -7 \\ -2c &= 6 \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 + 2a = 0 + 2 \times 1 = 2 \\ c = -7 + 2b = -7 + 2 \times 2 = -7 + 4 = -3 \\ 6 = -2c = -2 \times (-3) = 6 \qquad \textit{vérification} \checkmark \end{array}\right.$$
   En conclusion, $P(x) = (x-2)\left(x^2 + 2x - 3\right)$.
   b) **Division euclidienne**
$$\begin{array}{crrrrrrr|l}
 & x^3 & & & - & 7x & + & 6 & x-2 \\ \cline{9-9}
- & (x^3 & - & 2x^2) & & & & & x^2+2x-3 \\ \cline{2-8}
 & & & 2x^2 & - & 7x & + & 6 & \\
 & & - & (2x^2 & - & 4x) & & & \\ \cline{4-8}
 & & & & - & 3x & + & 6 & \\
 & & & - & (- & 3x & + & 6) & \\ \cline{5-8}
 & & & & & & & 0 &
\end{array}$$
   En conclusion, $P(x) = (x-2)\left(x^2 + 2x - 3\right)$.

V – Autres résolutions d'équations et d'inéquations

1 – Équations produit

Théorème 2.29

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul :

$$A \times B = 0 \iff A = 0 \quad \text{ou} \quad B = 0.$$

Exemple 2.30 – Résoudre l'équation $(x-1)(x+2)=0$.

$$\begin{aligned} (x-1)(x+2)=0 &\iff x-1=0 \quad \text{ou} \quad x+2=0 \\ &\iff x=1 \quad \text{ou} \quad x=-2 \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{S} = \{-2, 1\}$.

Remarque 2.31 – Grâce au théorème ci-dessus et aux différentes méthodes de factorisation vues précédemment, on peut résoudre certaines équations polynomiales de degrés supérieurs ou égaux à trois.

Méthode 2.32 – Résolution d'équations en degré supérieur

Pour résoudre une équation du type $P(x)=0$ avec $P(x)$ un polynôme tel que $\deg(P) \geqslant 3$:

1. On commence par chercher une racine évidente α (à chercher parmi $0, \pm1, \pm2, \dots$).
2. On factorise $P(x)$ sous la forme $(x-\alpha)Q(x)$
   (voir les deux méthodes "par identification" et "par division euclidienne").
3. Si $\deg(Q) \leqslant 2$, on sait résoudre ce genre d'équations (voir le début du chapitre).
4. Sinon, on itère ce processus en cherchant une racine évidente de $Q(x)$, etc.

Exemple 2.33 – Résoudre l'équation $x^3+3x^2-6x-8=0$.

Je note $P(x) = x^3+3x^2-6x-8$. Je commence par chercher une racine évidente. Je remarque que

$$P(-1) = (-1)^3 + 3\times(-1)^2 - 6\times-(1) - 8 = -1+3+6-8 = 0,$$

donc -1 est une première racine. Je cherche maintenant à factoriser le polynôme x^3+3x^2-6x-8 par $\big(x-(-1)\big) = x+1$. J'utilise la méthode par division euclidienne (par exemple).

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & x^3 & + & 3x^2 & - & 6x & - & 8 & x+1 \\ \cline{9-9}
- & (x^3 & + & x^2) & & & & & x^2+2x-8 \\ \cline{2-8}
 & & & 2x^2 & - & 6x & - & 8 & \\
 & & - & (2x^2 & + & 2x) & & & \\ \cline{4-8}
 & & & & - & 8x & - & 8 & \\
 & & & - & (- & 8x & - & 8) & \\ \cline{5-8}
 & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Il me reste encore à déterminer les racines du résultat x^2+2x-8.
Le discriminant vaut $\Delta = 2^2 - 4\times1\times(-8) = 4+32 = 36 = 6^2 > 0$. Il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{36}}{2\times1} = \frac{-2-6}{2} = -4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2+6}{2} = 2.$$

Ainsi, sans oublier la première solution -1, j'obtiens que l'ensemble des solutions est donné par

$$\mathcal{S} = \{-4, -1, 2\}.$$

2 – Équations quotient

Théorème 2.34

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul **ET** que son dénominateur ne l'est pas.
En particulier, si B n'est **jamais nul**, alors

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \iff A(x) = 0.$$

Exemple 2.35 – Résoudre l'équation $\dfrac{x+3}{\sqrt{2}} = 0$.

Comme $\sqrt{2} \neq 0$, alors $\dfrac{x+3}{\sqrt{2}} = 0 \iff x+3=0 \iff x=-3$. Et donc $\mathcal{S} = \{-3\}$.

Méthode 2.36 – Résolution d'une équation quotient
Avant de résoudre une équation quotient, on doit chercher les valeurs pour lesquelles le **dénominateur** s'annule. On appelle ces valeurs des **valeurs interdites**. On cherche ensuite les valeurs pour lesquelles le **numérateur** s'annule et on vérifie que les solutions trouvées ne sont pas des valeurs interdites.

Exemple 2.37 – Résoudre l'équation $\dfrac{x^2-x}{x} = 0$.

Je commence par chercher les valeurs interdites. Il n'y en a qu'une : $x = 0$.
Je résous maintenant l'équation $x^2 - x = 0$. Comme $x^2 - x = x(x-1)$, il y a donc deux racines : $x = 0$ et $x = 1$. Comme $x = 0$ est valeur interdite, j'obtiens finalement

$$\mathcal{S} = \{1\}.$$

Remarque 2.38 – Il est parfois nécessaire de faire quelques calculs avant de se ramener à une équation quotient. Ainsi, si une équation contient plusieurs fractions rationnelles, on commence par réunir tous les termes dans un seul membre de l'équation et on met toutes les fractions au même dénominateur pour pouvoir les additionner et obtenir une seule fraction rationnelle.

Exemple 2.39 – Résoudre l'équation $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x-3} = \dfrac{1}{x+2}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3} = \frac{1}{x+2} &\iff \frac{x-3}{(x-3)(x-1)} + \frac{2(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{1}{x+2}\\
&\iff \frac{x-3+2x-2}{(x-1)(x-3)} = \frac{1}{x+2} \iff \frac{3x-5}{(x-1)(x-3)} - \frac{1}{x+2} = 0\\
&\iff \frac{(3x-5)(x+2)}{(x-1)(x-3)(x+2)} - \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-3)(x+2)} = 0\\
&\iff \frac{3x^2+6x-5x-10-\left(x^2-3x-x+3\right)}{(x-1)(x-3)(x+2)} = 0\\
&\iff \frac{3x^2+6x-5x-10-x^2+3x+x-3}{(x-1)(x-3)(x+2)} = 0\\
&\iff \frac{2x^2+5x-13}{(x-1)(x-3)(x+2)} = 0
\end{aligned}$$

Les valeurs interdites sont donc $x = 1$, $x = 3$ et $x = -2$.
Je vais maintenant chercher à résoudre l'équation $2x^2 + 5x - 13$.

Le discriminant vaut $\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times (-13) = 25 + 104 = 129 > 0$. Il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{129}}{2\times 2} = \frac{-5-\sqrt{129}}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5+\sqrt{129}}{4}.$$

Comme aucune de ces deux solutions n'est valeur interdite, j'obtiens alors

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{-5-\sqrt{129}}{4}, \frac{-5+\sqrt{129}}{4} \right\}.$$

3 – Inéquations produits et inéquations quotient

Méthode 2.40 – Résoudre une inéquation polynomiale ou rationnelle

Le plan d'étude d'une inéquation polynomiale ou rationnelle est le suivant :

1. Rassembler, en additionnant/soustrayant, l'ensemble des termes d'un même côté de l'inégalité.
2. Factoriser l'expression pour obtenir un produit ou un quotient de facteurs de degré 1 ou 2.
3. Étudier le signe de chacun de ces facteurs.
4. Conclure après avoir fait la synthèse des signes des facteurs dans un tableau de signe.

Exemple 2.41 – Résoudre l'inéquation $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{3}{x} < \dfrac{1}{x+7}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x} < \frac{1}{x+7} &\iff \frac{x+3(x-2)}{x(x-2)} < \frac{1}{x+7} \iff \frac{4x-6}{x(x-2)} - \frac{1}{x+7} < 0 \\
&\iff \frac{(4x-6)(x+7) - x(x-2)}{x(x-2)(x+7)} < 0 \iff \frac{4x^2+28x-6x-42-x^2+2x}{x(x-2)(x+7)} < 0 \\
&\iff \frac{3x^2+24x-42}{x(x-2)(x+7)} < 0 \iff \frac{3\left(x^2+8x-14\right)}{x(x-2)(x+7)} < 0
\end{aligned}$$

J'étudie maintenant le signe de chacun des termes de $\dfrac{3\left(x^2+8x-14\right)}{x(x-2)(x+7)}$.

Le discriminant de $x^2+8x-14$ vaut $\Delta = 8^2 - 4 \times 1 \times (-14) = 64 + 56 = 120 > 0$. Il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-8-\sqrt{120}}{2\times 1} = \frac{-8-2\sqrt{30}}{2} = -4-\sqrt{30} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-8+2\sqrt{30}}{2} = -4+\sqrt{30}.$$

J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-4-\sqrt{30}$		-7		0		$-4+\sqrt{30}$		2		$+\infty$
3		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$x+7$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x^2+8x-14$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{3\left(x^2+8x-14\right)}{x(x-2)(x+7)}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Finalement, j'obtiens les solutions de l'inéquation de départ en regardant pour quelles valeurs de x l'expression est négative :

$$\mathcal{S} = \left]-\infty, -4-\sqrt{30}\right[\cup \left]-7, 0\right[\cup \left]-4+\sqrt{30}, 2\right[.$$