15 Systèmes linéaires

I – Définition et exemples

Définition 15.1 – On appelle **système linéaire** de n **équations** à p **inconnues** $x_1, \ldots, x_p$ tout système (S) de la forme

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

où les $a_{i,j}$ et les b_i désignent des réels supposés connus.
La i-ème équation du système (S) est notée L_i et s'appelle la i-ème **ligne** du système (S).
Résoudre le système (S), c'est déterminer tous les p-uplets $\left(x_1, \ldots, x_p\right)$ vérifiant les n équations du système. Si tous les b_i sont nuls, on dit que le système (S) est **homogène**.

Exemple 15.2 –

- Le système suivant est un système de deux équations à deux inconnues :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 1 \\ x & - & y & = & -4 \end{array}\right.$$

  Le couple $\left(-1, 3\right)$ en est une solution car $2 \times (-1) + 3 = -2 + 3 = 1$ et $-1 - 3 = -4$.
- Le système suivant est un système **homogène** de trois équations à trois inconnues :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & 5z & = & 0 \\ x & - & 3y & + & z & = & 0 \\ 3x & - & 2y & + & 6z & = & 0 \end{array}\right.$$

  On note que le triplet $\left(0, 0, 0\right)$ est solution évidente, mais il peut y en avoir d'autres.
- Le système suivant est un système de trois équations à deux inconnues :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & 5y & = & -2 \\ 3x & + & y & = & 0 \\ -x & + & 2y & = & 1 \end{array}\right.$$

Remarque 15.3 –

- Il ne faut pas croire qu'un système linéaire admet **toujours** une **unique** solution ! En effet, certains systèmes linéaires admettent une infinité de solutions et d'autres n'admettent aucune solution.
- En pratique, on rencontre principalement des systèmes de deux équations à deux inconnues ou bien des systèmes de trois équations à trois inconnues.

Définition 15.4 – On dit que deux systèmes (S) et (S') sont **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions.

II – Résolution des systèmes linéaires

1 – Méthode par substitution

Pour les systèmes de deux équations à deux inconnues, on peut résoudre un système en exprimant une inconnue en fonction de l'autre, puis en remplaçant cette inconnue dans l'autre ligne.

Exemple 15.5 – Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

En utilisant L_1, j'obtiens une expression de x en fonction de y : $x = 1 - y$.
Puis en remplaçant x par cette expression dans L_2, cela me donne

$$2(1-y) - y = 5 \iff 2 - 2y - y = 5 \iff 2 - 3y = 5.$$

Je résous cette équation :

$$2 - 3y = 5 \iff -3y = 5 - 2 \iff -3y = 3 \iff y = \frac{3}{-3} = -1.$$

Et donc $x = 1 - y = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$. L'unique solution de ce système est donc $\big(2, -1\big)$.

2 – Opérations élémentaires sur les lignes

Définition 15.6 – Les opérations suivantes sur les lignes d'un système linéaire (S) sont appelées **opérations élémentaires**.

- $L_i \leftrightarrow L_j$: échange de deux lignes.
- $L_i \leftarrow aL_i$: remplacement d'une ligne par son produit par un réel **non nul** a.
- $L_i \leftarrow L_i + bL_j$: remplacement d'une ligne par sa somme avec un multiple d'une autre ligne.
- $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$: regroupement en une opération des deux opérations précédentes.

Proposition 15.7

Si on transforme un système à l'aide d'**UNE** opération élémentaire, on obtient un système équivalent.

ATTENTION ! Il est très important de n'appliquer qu'**UNE** opération élémentaire à la fois. Sinon on peut ne pas obtenir un système équivalent.

Exemple 15.8 –

$$\begin{cases} x - 7y + 11z = 1 \\ -x + 12y - 19z = 2 \\ -3y + 5z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 7y + 11z = 1 \\ 5y - 8z = 3 \\ -3y + 5z = 3 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

3 – Système triangulaire

Définition 15.9 – Un système triangulaire est un système de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{cases}$$

Le terme **système échelonné** est aussi utilisé pour parler d'un système triangulaire.

Exemple 15.10 – Les systèmes suivants sont des systèmes triangulaires :

$$\begin{cases} 2x & + & 3y & = & 0 \\ & & -y & = & 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x & + & y & - & 2z & = & -2 \\ & & -2y & + & 3z & = & 3 \\ & & & & 2z & = & 6 \end{cases}$$

La résolution des systèmes triangulaires est plutôt simple. On trouve la dernière inconnue grâce à la dernière équation, puis on trouve les autres inconnues successivement en remontant d'équation en équation.

Exemple 15.11 – Résoudre le second système triangulaire ci-dessus.
La dernière équation me permet d'obtenir

$$2z = 6 \iff z = \frac{6}{2} = 3.$$

En remplaçant z dans la deuxième équation, j'obtiens

$$-2y + 3 \times 3 = 3 \iff -2y + 9 = 3 \iff -2y = 3 - 9 = -6 \iff y = \frac{-6}{-2} = 3.$$

Enfin en remplaçant y et z dans la première équation, j'obtiens

$$x + 3 - 2 \times 3 = -2 \iff x - 3 = -2 \iff x = -2 + 3 = 1.$$

Ainsi l'unique solution du système est $(1, 3, 3)$.

4 – Méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss est un procédé algorithmique qui permet de passer d'un système linéaire de n équations à n inconnues quelconque à un système triangulaire équivalent en utilisant uniquement des opérations élémentaires sur les lignes du système.

Exemple 15.12 – Résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} & & -y & + & 2z & = & 7 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & -4 \end{cases}$$

Première étape : Il faut que la première ligne contienne la première inconnue (ici x).
Si ce n'est pas le cas, j'échange la première ligne avec une autre ligne qui contient x
(avec si possible le coefficient 1 ou -1 pour simplifier les calculs suivants).

Ici, j'échange donc les lignes L_1 et L_3. Le système devient

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 1 \\ & & -y & + & 2z & = & 7 \end{array}\right. \qquad L_1 \leftrightarrow L_3$$

Puis à l'aide des autres opérations élémentaires, je fais "disparaître" la première inconnue dans les autres lignes. En d'autres termes, je "nettoie" la première colonne des x.
Je commence par supprimer le terme en x dans la deuxième ligne, en retirant $2L_1$ à L_2.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ & & y & + & 6z & = & 9 \\ & & -y & + & 2z & = & 7 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

Puis je supprime le x dans la troisième ligne : je n'ai rien à faire ici.

Deuxième étape : Il faut que la deuxième équation contienne la deuxième inconnue (ici y).
Si ce n'est pas le cas, j'échange la deuxième ligne avec une autre ligne contenant y
(avec si possible le coefficient 1 pour simplifier les calculs), **mais sans utiliser la ligne** L_1.
Ici je n'ai rien à faire : la deuxième ligne contient déjà y.

Puis à l'aide des autres opérations élémentaires, je fais "disparaître" la deuxième inconnue dans les autres lignes. En d'autres termes, je "nettoie" la deuxième colonne des y.
Il me suffit ici d'additionner L_2 à L_3 pour faire disparaître le terme en y de L_3.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ & & y & + & 6z & = & 9 \\ & & & & 8z & = & 16 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

Troisième étape : J'obtiens alors un système triangulaire que je sais résoudre.
La troisième équation me donne

$$8z = 16 \iff z = \frac{16}{8} = 2.$$

En remplaçant z dans la deuxième équation, j'obtiens

$$y + 6 \times 2 = 9 \iff y + 12 = 9 \iff y = 9 - 12 = -3.$$

Enfin, en remplaçant y et z dans la première équation, j'obtiens

$$x - 3 - 2 = -4 \iff x - 5 = -4 \iff x = -4 + 5 = 1.$$

Ainsi l'unique solution du système est $\big(1, -3, 2\big)$.