

## EXERCICES — CHAPITRE 13

**Exercice 1 (★★)** – Simplifier les écritures suivantes.

$$\begin{aligned} 1. \quad & (e^x)^2 - \frac{1}{e^{-2x}} \\ 2. \quad & (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 \\ 3. \quad & e^{-x} \left( e^{2x} - \frac{1}{e^x} \right) \\ 4. \quad & \frac{e^{2x+1}}{e^{1-x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad & \frac{(e^{x+2})^2}{e^{2x-1}} \\ 6. \quad & \ln(e^{2x+1} \times e^{2-x}) \\ 7. \quad & \frac{e^{2x+\ln(2)}}{e^{-x}} \\ 8. \quad & \frac{e^{x+\ln(8)}}{e^{x-\ln(2)}} \end{aligned}$$

**Exercice 2 (★★)** – Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes.

$$\begin{aligned} 1. \quad & e^{x^2+2x-3} = 1 \\ 2. \quad & \frac{e^{x^2-3}}{e^{2x+1}} = e^{-3x+8} \\ 3. \quad & 2e^{2x} - e^x - 1 = 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} 4. \quad & \ln(e^{x+1}) = e^{x+1} + x \\ 5. \quad & e^{\ln(x^2+1)} - \ln(e^{1-x^2}) = \frac{1}{2} \\ 6. \quad & \ln(e^{-x}) + e^{-\ln(x)} = 0 \end{aligned}$$

**Exercice 3 (★★)** – Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes.

$$\begin{aligned} 1. \quad & e^{\frac{1}{x}} \geq e \\ 2. \quad & e^{3x-1} < e^{x+2} \end{aligned} \quad \begin{aligned} 3. \quad & e \times e^{x^2} \leq (e^x)^2 \\ 4. \quad & e^{x^2-10x+21} \geq 1 \end{aligned}$$

**Exercice 4 (★★)** – Déterminer les limites des fonctions suivantes en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

$$\begin{aligned} 1. \quad & f(x) = e^{2x} - 1 & 5. \quad & f(x) = e^{-x} & 9. \quad & f(x) = e^{x^2-3x+1} \\ 2. \quad & f(x) = x e^x - 2 & 6. \quad & f(x) = \frac{1}{x} + 1 - 3e^x & 10. \quad & f(x) = (1-2x)e^x \\ 3. \quad & f(x) = 4 - 2x + e^x & 7. \quad & f(x) = \frac{e^x + 1}{x^2 - x} & 11. \quad & f(x) = x + 1 + x e^x \\ 4. \quad & f(x) = \frac{e^x - 1}{x} & 8. \quad & f(x) = \exp\left(\frac{2x+1}{x+3}\right) & 12. \quad & f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \end{aligned}$$

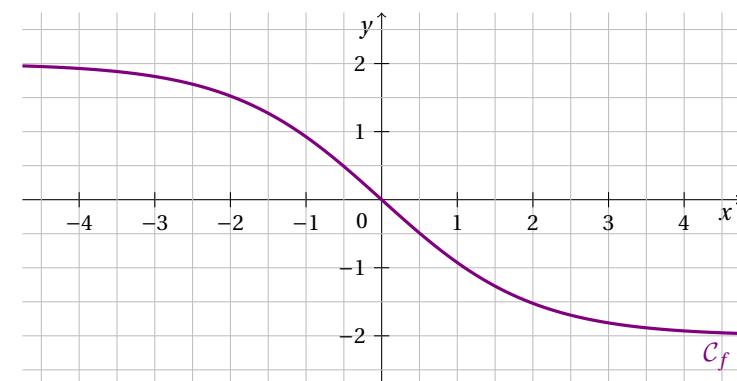
**Exercice 5 (★★★)** – Déterminer les limites des fonctions suivantes en 0.

$$\begin{aligned} 1. \quad & f(x) = \frac{e^x - 1}{2e^x} & 2. \quad & f(x) = \frac{2x}{e^x - 1} & 3. \quad & f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x} \end{aligned}$$

**Exercice 6 (★★)** – Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$$\begin{aligned} 1. \quad & f \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ par } f(x) = e^{x^2} - (e^x)^2 \\ 2. \quad & f \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ par } f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^{1-x}} \\ 3. \quad & f \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ par } f(x) = e^{-x^2} \times e^{x^2-2x+1} \end{aligned}$$

**Exercice 7 (★★★)** – On a tracé ci-dessous, la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{4}{1+e^x} - 2$ .



- Calculer  $f(-\ln(7))$  et  $f(\ln(3))$ .
- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $f(x) = 0$ .
- La courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative de la fonction  $f$  admet-elle des asymptotes ?
- a) On note  $f'$  la dérivée de la fonction  $f$ . Calculer  $f'(x)$ .  
b) Étudier les variations de la fonction  $f$ .
- Déterminer une équation de la tangente  $\mathcal{T}$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $\ln(3)$ .

**Exercice 8 (★★★)** – Soit  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = e^x + \frac{1}{e^x}$ .

- On note  $f'$  la dérivée de la fonction  $f$ . Calculer  $f'(x)$ .
- Donner le tableau de variation de  $f$ .
- En déduire que pour tout réel  $x$ ,  $e^x + e^{-x} \geq 2$ .

**Exercice 9 (★★★)** – Soit  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = \frac{3-2x}{e^x}$ .

1. a) Montrer que pour tout nombre réel  $x$ ,  $f'(x) = (2x-5) \times e^{-x}$ .
- b) Étudier les variations de la fonction  $f$ .
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction  $f$  au point d'abscisse 0.

**Exercice 10 (★★★)** – Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (4-x)e^x - 2$ .

1. a) Déterminer, en justifiant avec soin,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- b) La courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative de la fonction  $f$  admet-elle des asymptotes?
2. a) On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$ . Calculer  $f'(x)$ .
- b) Étudier les variations de la fonction  $f$ .
3. Déterminer une équation de la tangente  $\mathcal{T}$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 2.
4. Tracer les asymptotes, la tangente  $\mathcal{T}$  et la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

Indication numérique:  $e^2 \approx 7.4$  et  $e^3 \approx 20.1$

**Exercice 11 (★★★)** – Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{4e^x}{1+e^x}$ .

On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

1. Calculer  $f'(x)$ . En déduire le sens de variation de  $f$ .
2. Montrer que  $f(x) = \frac{4}{1+e^{-x}}$ , puis calculer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .  
En déduire l'existence d'éventuelles asymptotes.
3. Résumer les résultats précédents dans un tableau de variation.
4. On appelle  $\mathcal{T}$  la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0. Déterminer une équation de  $\mathcal{T}$ .
5. Soit  $d$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $d(x) = f(x) - (x+2)$ .
  - a) Vérifier que  $d'(x) = \frac{-(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$  et en déduire les variations de  $d$ .
  - b) Calculer  $d(0)$  puis étudier le signe de  $d(x)$ .
  - c) En déduire la position relative de  $\mathcal{C}_f$  et de  $\mathcal{T}$ .
6. Tracer les asymptotes trouvées à la question 2., la tangente en 0 et la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

**Exercice 12 (★★★)** – [BSB 2012 / Ex2]  
Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$g(x) = e^x - 1 + x.$$

1. a) Montrer que  $g$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .
  - b) Calculer  $g(0)$ . En déduire, pour tout réel  $x$ , le signe de  $g(x)$  selon les valeurs de  $x$ .
- On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = x + 1 - \frac{x}{e^x}.$$

On note  $\mathcal{C}$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

2. a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- b) Montrer que la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x + 1$  est asymptote à  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .
- c) Justifier que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .
3. a) Montrer que la dérivée de  $f$  vérifie, pour tout réel  $x$ , la relation

$$f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}.$$

- b) Dresser le tableau des variations de  $f$  en y faisant figurer les limites calculées à la question 2..
4. Tracer l'allure de la courbe  $\mathcal{C}$  et de la droite  $\mathcal{D}$ .

**Exercice 13 (★★★)** – Calculer les intégrales suivantes.

- |   |   |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>I_1 = \int_0^1 e^{3x} dx</math></li> <li>2. <math>I_2 = \int_{-2}^2 e^x - e^{-x} dx</math></li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>3. <math>I_3 = \int_0^1 e^{2x} + \frac{e^x}{4} dx</math></li> <li>4. <math>I_4 = \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt</math></li> </ol> |
|---|---|