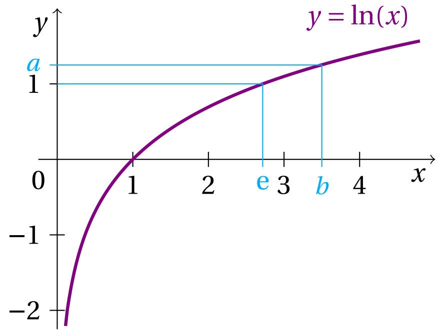
13 Fonction exponentielle

I – Définition et premières propriétés

Il est possible de généraliser la démarche qui a permis d'introduire dans le chapitre précédent le nombre e : il suffit de remplacer le nombre 1 par un nombre réel a quelconque.
Il existe un unique nombre réel b tel que $\ln(b) = a$. Et

- pour $a = 1$, $b = \mathrm{e}$,
- pour $a = 2$, $b = \mathrm{e}^2$,
- pour $a = -1$, $b = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{e}$,
- et pour $a = n$, où $n \in \mathbb{Z}$, $b = \mathrm{e}^n$.



Définition 13.1 – Le nombre b tel que $\ln(b) = a$ est appelé **exponentielle de** a et noté e^a.
On définit ainsi une nouvelle fonction, appelée **fonction exponentielle**, notée exp, définie sur $\mathbb{R}$ et prenant ses valeurs dans $]0, +\infty[$.
Pour des raisons évidentes, on note le plus souvent $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

Remarque 13.2 – La fonction exponentielle est la **bijection réciproque** de la fonction logarithme népérien :

$$]0, +\infty[\xrightarrow{\ln} \mathbb{R} \quad \text{et en sens inverse} \quad]0, +\infty[\xleftarrow{\exp} \mathbb{R}.$$

Proposition 13.3

Puisque les deux fonctions sont réciproques l'une de l'autre :

- Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$.
- Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ et tout réel strictement positif $y \in \mathbb{R}_+^*$, $y = \mathrm{e}^x \iff x = \ln(y)$.
- Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\ln\left(\mathrm{e}^x\right) = x$.
- Pour tout réel strictement positif $y \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{e}^{\ln(y)} = y$.

Remarque 13.4 – Toujours en raison de la réciprocité et parce que $\ln(1) = 0$, alors $\mathrm{e}^0 = 1$.

Exemple 13.5 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

- $\mathrm{e}^x = 1$

  $\mathrm{e}^x = 1 \iff x = \ln(1) \iff x = 0$

- $\ln(x) = 2$

  $\ln(x) = 2 \iff x = \mathrm{e}^2$

- $\mathrm{e}^{2t-1} = 1$

  $\mathrm{e}^{2t-1} = 1 \iff 2t - 1 = \ln(1) = 0$
  $\iff 2t = 1 \iff t = \dfrac{1}{2}$

- $\ln(3x) = \dfrac{1}{2}$

  $\ln(3x) = \dfrac{1}{2} \iff 3x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \iff x = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$

Proposition 13.6 – Propriété fondamentale de l'exponentielle

Pour tous nombres réels $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$,
$$e^{a+b} = e^a \times e^b.$$

Corollaire 13.7

De cette propriété algébrique fondamentale découle plusieurs conséquences.

- Pour tout nombre réel $a \in \mathbb{R}$, $\quad e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$.
- Pour tous nombres réels $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, $\quad e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.
- Pour tout nombre réel $a \in \mathbb{R}$ et tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, $\quad e^{na} = \left(e^a\right)^n$.

Démonstration.

- Grâce à la proposition précédente, je sais que $\quad e^a \times e^{-a} = e^{a-a} = e^0 = 1 \quad$ donc $\quad e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$.
- De la même manière, $\quad e^{a-b} = e^a \times e^{-b} = e^a \times \dfrac{1}{e^b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.
- Enfin en itérant, $\quad e^{na} = \exp\left(\underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ fois}}\right) = \underbrace{e^a \times e^a \times \ldots e^a}_{n \text{ fois}} = \left(e^a\right)^n$.

□

Exemple 13.8 – Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Simplifier le plus possible les expressions suivantes.

1. $\dfrac{e^{2x}}{e^x} = e^{2x-x} = e^x$
2. $\dfrac{\left(e^x\right)^2}{e^x} = \dfrac{e^{2x}}{e^x} = e^{2x-x} = e^x$
3. $\dfrac{e^x}{e^{-x}} = e^{x-(-x)} = e^{x+x} = e^{2x}$
4. $\left(e^{2x}\right)^3 \times \left(e^{-x}\right)^2 = e^{6x} \times e^{-2x} = e^{6x-2x} = e^{4x}$
5. $e^0 \times e^{-x} \times \left(e^x\right)^2 = 1 \times e^{-x} \times e^{2x} = e^{-x+2x} = e^x$
6. $\dfrac{e^x}{e^y} \times e^{y-x} = e^{x-y} \times e^{y-x} = e^{x-y+y-x} = e^0 = 1$

II – Étude de la fonction exponentielle

1 – Ensemble de définition

Proposition 13.9

La fonction exponentielle est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et a ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, $\quad$ *i.e.* dans $]0, +\infty[$.

2 – Dérivée et variations

Proposition 13.10

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ $\quad$ et $\quad \exp'(x) = \exp(x)$.

Démonstration. En considérant la fonction composée f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(\exp(x)\right)$, alors $f'(x) = \dfrac{\exp'(x)}{\exp(x)}$. Mais aussi $\ln\left(\exp(x)\right) = x$, *i.e.* $f(x) = x$. Donc également $f'(x) = 1$. Ainsi
$$1 = \frac{\exp'(x)}{\exp(x)} \iff \exp'(x) = \exp(x).$$

□

Proposition 13.11

La fonction exponentielle est **continue** et **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur cet intervalle.
Et pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x) > 0$. Donc la dérivée de la fonction est strictement positive et la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. □

Proposition 13.12

Pour tous réels $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \iff a = b \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^a > \mathrm{e}^b \iff a > b.$$

Exemple 13.13 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

1. $\dfrac{\mathrm{e}^{3x+5}}{\mathrm{e}^{3-2x}} = \mathrm{e}^{2x^2-1}$

   $$\frac{\mathrm{e}^{3x+5}}{\mathrm{e}^{3-2x}} = \mathrm{e}^{2x^2-1} \iff \mathrm{e}^{5x+2} = \mathrm{e}^{2x^2-1} \iff 5x+2 = 2x^2-1 \iff 2x^2-5x-3=0$$

   Je calcule alors le discriminant : $\Delta = (-5)^2 - 4\times 2\times(-3) = 25+24 = 49 > 0$.
   Il y a donc deux racines :

   $$x_1 = \frac{-(-5)-\sqrt{49}}{2\times 2} = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+7}{4} = 3.$$

2. $\mathrm{e}^{x^2+x-1} = 1$

   $$\mathrm{e}^{x^2+x-1} = 1 \iff \mathrm{e}^{x^2+x-1} = \mathrm{e}^0 \iff x^2+x-1=0$$

   Je calcule le discriminant : $\Delta = 1^2 - 4\times 1\times(-1) = 1+4 = 5 > 0$.
   Il y a donc deux racines :

   $$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

3. $\mathrm{e}^{2x} \leqslant \mathrm{e}^x$

   $$\mathrm{e}^{2x} \leqslant \mathrm{e}^x \iff 2x \leqslant x \iff x \leqslant 0$$

   Donc $\mathcal{S} =]-\infty, 0]$.

4. $\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{x^2} < 1$

   $$\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{x^2} < 1 \iff \mathrm{e}^{2x+x^2} < \mathrm{e}^0 \iff 2x+x^2 < 0 \iff x(2+x) < 0$$

   J'établis le tableau de signe du produit :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+2x		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Et donc $\mathcal{S} =]-2, 0[$.

3 – Limites

Proposition 13.14

La fonction exponentielle a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, *i.e.*

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

La fonction exponentielle a pour limite 0 en $-\infty$, *i.e.*

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

L'axe des abscisses est **asymptote horizontale** à la courbe d'équation $y = e^x$ en $-\infty$.

Exemple 13.15 – Calculer $\lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$, $\lim_{x\to 0^-} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim_{x\to 0^+} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$.

Je raisonne par composition :

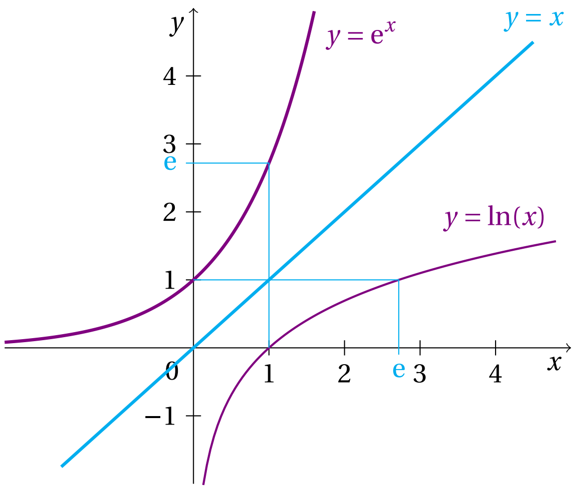
$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0\\ \lim_{X\to 0} e^X = 1\end{array}\right\} \text{Par composition, } \lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty\\ \lim_{X\to-\infty} e^X = 0\end{array}\right\} \text{Par composition, } \lim_{x\to 0^-} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty\\ \lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty\end{array}\right\} \text{Par composition, } \lim_{x\to 0^+} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty.$$

4 – Courbe représentative

- La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien. Dans un repère orthonormé, leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.
- Connaître l'allure des courbes des fonctions logarithme et exponentielle permet de retrouver graphiquement toutes les informations importantes à propos de ces deux fonctions.



5 – Croissances comparées

Proposition 13.16

Pour tout entier naturel non nul n,

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

En particulier lorsque $n = 1$,

$$\lim_{x\to-\infty} x e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

Remarque 13.17 – Ces limites sont normalement des **formes indéterminées**.
Pour lever de telles indéterminations, on applique les résultats de *croissances comparées*.
On retient que l'exponentielle "l'emporte" sur les puissances.

Exemple 13.18 – Calculer $\lim_{x\to-\infty} x^2 e^x$ et $\lim_{x\to+\infty} e^x - x$.

Par croissances comparées, et en réécrivant $e^x - x = x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)$, alors

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} e^x - x = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty.$$

III – Étude d'une fonction de la forme $\exp(u)$

Proposition 13.19

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction composée $f = e^u$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = u'(x)\, e^{u(x)}.$$

On note parfois pour simplifier $(e^u)' = u' e^u$.

Exemple 13.20 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^3-4x^2+2x-3}$. Calculer $f'(x)$.
La fonction f est de la forme $f = e^u$ avec $u(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 3$. Alors $u'(x) = 3x^2 - 8x + 2$ et donc

$$f'(x) = u'(x)\, e^{u(x)} = \left(3x^2 - 8x + 2\right) e^{x^3-4x^2+2x-3}.$$

Exemple 13.21 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x^3-15x^2+36x-25}$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} 2x^3 - 15x^2 + 36x - 25 = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 &= -\infty \\ \lim_{X\to-\infty} e^X &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Par composition,} \quad \lim_{x\to-\infty} e^{2x^3-15x^2+26x-25} = 0.$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} 2x^3 - 15x^2 + 36x - 25 = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 &= +\infty \\ \lim_{X\to+\infty} e^X &= +\infty \end{aligned}\right\} \text{Par composition,} \quad \lim_{x\to+\infty} e^{2x^3-15x^2+26x-25} = +\infty.$$

2. Étudier les variations de la fonction f.
   La fonction f est de la forme $f = e^u$ avec $u(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 25$.
   Alors $u'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6\left(x^2 - 5x + 6\right)$ et donc

$$f'(x) = 6\left(x^2 - 5x + 6\right) e^{2x^3-15x^2+36x-25}.$$

   Comme l'exponentielle est toujours positive, il ne reste plus qu'à étudier le signe de $x^2 - 5x + 6$.
   Le discriminant vaut $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$. Il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

J'en déduis alors le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$6(x^2-5x+6)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$e^{2x^3-15x^2+36x-25}$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	e^3	$\searrow$	e^2	$\nearrow$	$+\infty$

IV – Primitives et fonction exponentielle

La fonction exponentielle étant désormais connue, on peut compléter le tableau des primitives usuelles en y ajoutant les deux lignes suivantes :

f **est définie sur** I **par**	**une primitive** F **est donnée par**
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f = u' e^u$	$F = e^u$

Remarque 13.22 – On peut remarquer en particulier qu'une primitive d'une fonction de la forme $f(x) = e^{ax}$ (avec $a \neq 0$) est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{a} e^{ax}.$$

Exemple 13.23 – Calculer les primitives des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = e^{2x}$
2. $f(x) = e^{3x} - e^{-x}$
3. $f(x) = x e^{x^2}$

1. La fonction f est de la forme $f(x) = e^{ax}$ avec $a = 2$, donc une primitive de f est donnée par
$$F(x) = \frac{1}{2} e^{2x}.$$

2. La fonction f est la somme de deux fonctions dont je peux calculer une primitive.
En effet, une primitive de $f_1(x) = e^{3x}$ est donnée par $F_1(x) = \frac{1}{3} e^{3x}$
et une primitive de $f_2(x) = e^{-x}$ est donnée par $F_2(x) = -e^{-x}$.
Donc une primitive de f est donnée par
$$F(x) = \frac{1}{3} e^{3x} - \left(-e^{-x}\right) = \frac{1}{3} e^{3x} + e^{-x}.$$

3. La fonction f semble être de la forme $u' e^u$ avec $u(x) = x^2$. Puisque $u'(x) = 2x$ alors
$$u'(x) e^{u(x)} = 2x e^{x^2} = 2 f(x).$$
Donc une primitive de f est donnée par
$$F(x) = \frac{1}{2} e^{u(x)} = \frac{1}{2} e^{x^2}.$$