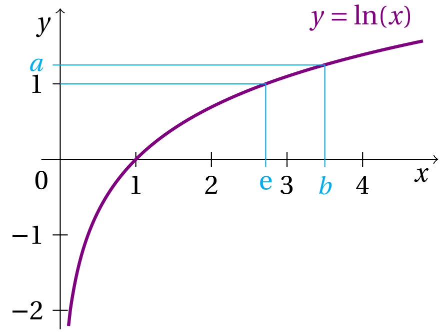
# 13 | Fonction exponentielle

## I – Définition et premières propriétés

Il est possible de généraliser la démarche qui a permis d'introduire dans le chapitre précédent le nombre e : il suffit de remplacer le nombre 1 par un nombre réel $a$ quelconque.
Il existe un unique nombre réel $b$ tel que $\ln(b) = a$. Et

- pour $a = 1$, $b = \mathrm{e}$,
- pour $a = 2$, $b = \mathrm{e}^2$,
- pour $a = -1$, $b = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{e}$,
- et pour $a = n$, où $n \in \mathbb{Z}$, $b = \mathrm{e}^n$.




**Définition 13.1 –** Le nombre $b$ tel que $\ln(b) = a$ est appelé **exponentielle de** $a$ et noté $\mathrm{e}^a$.
On définit ainsi une nouvelle fonction, appelée **fonction exponentielle**, notée exp, définie sur $\mathbb{R}$ et prenant ses valeurs dans $]0,+\infty[$.
Pour des raisons évidentes, on note le plus souvent $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

**Remarque 13.2 –** La fonction exponentielle est la **bijection réciproque** de la fonction logarithme népérien :

$$]0,+\infty[ \xrightarrow{\ln} \mathbb{R} \quad \text{et en sens inverse} \quad ]0,+\infty[ \xleftarrow{\exp} \mathbb{R}.$$

**Proposition 13.3**

Puisque les deux fonctions sont réciproques l'une de l'autre :

- Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$.
- Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ et tout réel strictement positif $y \in \mathbb{R}_+^*$, $y = \mathrm{e}^x \iff x = \ln(y)$.
- Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\ln\left(\mathrm{e}^x\right) = x$.
- Pour tout réel strictement positif $y \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{e}^{\ln(y)} = y$.

**Remarque 13.4 –** Toujours en raison de la réciprocité et parce que $\ln(1) = 0$, alors $\mathrm{e}^0 = 1$.

**Exemple 13.5 –** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

- $\mathrm{e}^x = 1$
- $\ln(x) = 2$
- $\mathrm{e}^{2t-1} = 1$
- $\ln(3x) = \dfrac{1}{2}$

**Proposition 13.6 – Propriété fondamentale de l'exponentielle**

Pour tous nombres réels $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^{a} \times \mathrm{e}^{b}.$$

**Corollaire 13.7**

De cette propriété algébrique fondamentale découle plusieurs conséquences.

- Pour tout nombre réel $a \in \mathbb{R}$, $\quad \mathrm{e}^{-a} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{a}}$.
- Pour tous nombres réels $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, $\quad \mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^{a}}{\mathrm{e}^{b}}$.
- Pour tout nombre réel $a \in \mathbb{R}$ et tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, $\quad \mathrm{e}^{na} = \left(\mathrm{e}^{a}\right)^{n}$.

*Démonstration.*

□

**Exemple 13.8 –** Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Simplifier le plus possible les expressions suivantes.

1. $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{x}}$
2. $\dfrac{\left(\mathrm{e}^{x}\right)^{2}}{\mathrm{e}^{x}}$
3. $\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{-x}}$
4. $\left(\mathrm{e}^{2x}\right)^{3} \times \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^{2}$
5. $\mathrm{e}^{0} \times \mathrm{e}^{-x} \times \left(\mathrm{e}^{x}\right)^{2}$
6. $\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{y}} \times \mathrm{e}^{y-x}$

# II – Étude de la fonction exponentielle

## 1 – Ensemble de définition

**Proposition 13.9**

La fonction exponentielle est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et a ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, *i.e.* dans $]0, +\infty[$.

## 2 – Dérivée et variations

**Proposition 13.10**

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp'(x) = \exp(x)$.

*Démonstration.*

□

**Proposition 13.11**

La fonction exponentielle est **continue** et **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

*Démonstration.*

$\square$

**Proposition 13.12**

Pour tous réels $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$,

$$e^a = e^b \iff a = b \quad \text{et} \quad e^a > e^b \iff a > b.$$

**Exemple 13.13 –** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

1. $\dfrac{e^{3x+5}}{e^{3-2x}} = e^{2x^2-1}$

2. $e^{x^2+x-1} = 1$

3. $e^{2x} \leqslant e^x$

4. $e^{2x}\, e^{x^2} < 1$

## 3 – Limites

**Proposition 13.14**

La fonction exponentielle a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, *i.e.*

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty.$$

La fonction exponentielle a pour limite 0 en $-\infty$, *i.e.*

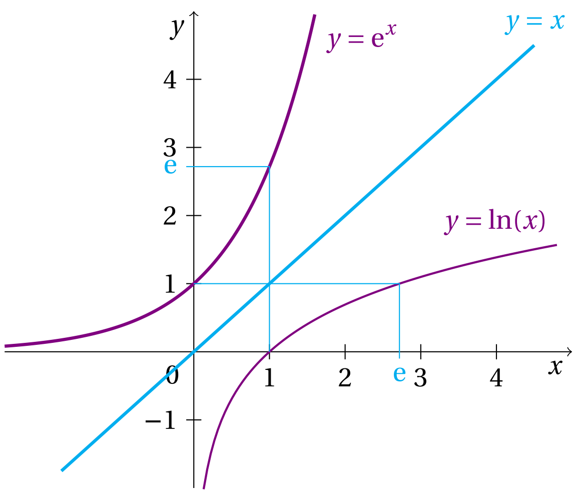
$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0.$$

L'axe des abscisses est **asymptote horizontale** à la courbe d'équation $y = \mathrm{e}^x$ en $-\infty$.

**Exemple 13.15 –** Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$, $\displaystyle\lim_{x\to0^-} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$.

## 4 – Courbe représentative

- La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien. Dans un repère orthonormé, leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.
- Connaître l'allure des courbes des fonctions logarithme et exponentielle permet de retrouver graphiquement toutes les informations importantes à propos de ces deux fonctions.




## 5 – Croissances comparées

**Proposition 13.16**

Pour tout entier naturel non nul $n$,

$$\lim_{x\to-\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty.$$

En particulier lorsque $n = 1$,

$$\lim_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty.$$

**Remarque 13.17 –** Ces limites sont normalement des **formes indéterminées**.
Pour lever de telles indéterminations, on applique les résultats de *croissances comparées*.
On retient que l'exponentielle "l'emporte" sur les puissances.

**Exemple 13.18 –** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\,\mathrm{e}^x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x - x$.

## III – Étude d'une fonction de la forme $\exp(u)$

**Proposition 13.19**

Soit $u$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$. La fonction composée $f = \mathrm{e}^u$ est dérivable sur $I$ et

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}.$$

On note parfois pour simplifier $\left(\mathrm{e}^u\right)' = u'\,\mathrm{e}^u$.

**Exemple 13.20 –** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x^3-4x^2+2x-3}$. Calculer $f'(x)$.

**Exemple 13.21 –** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2x^3-15x^2+36x-25}$.

1. Calculer les limites de $f$ en $-\infty$ et $+\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction $f$.

## IV – Primitives et fonction exponentielle

La fonction exponentielle étant désormais connue, on peut compléter le tableau des primitives usuelles en y ajoutant les deux lignes suivantes :

| **$f$ est définie sur $I$ par** | **une primitive $F$ est donnée par** |
|---|---|
| $f(x) = e^x$ | $F(x) = e^x$ |
| $f = u' e^u$ | $F = e^u$ |

**Remarque 13.22 –** On peut remarquer en particulier qu'une primitive d'une fonction de la forme $f(x) = e^{ax}$ (avec $a \neq 0$) est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{a} e^{ax}.$$

**Exemple 13.23 –** Calculer les primitives des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = e^{2x}$
2. $f(x) = e^{3x} - e^{-x}$
3. $f(x) = x e^{x^2}$

1.

2.

3.