# EXERCICES — CHAPITRE 12

**Exercice 1** $(\star)$ – Soient $x$ et $y>0$. Simplifier le plus possible les expressions suivantes.

1. $\ln\left(\frac{1}{x}\right)+\ln(2x)$
2. $\ln\left(x^3\right)-\ln\left(x^2\right)+\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$
3. $2\ln\left(x^3\right)-3\ln\left(x^2\right)$
4. $\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)+\ln(x)$
5. $\ln\left(\frac{x}{y}\right)+\ln\left(\frac{y}{x}\right)-\ln\left(\frac{1}{x}\right)$
6. $\ln(2x+2)-\ln(x+1)$

**Exercice 2** $(\star\star)$ – Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle considéré.

1. $\ln(x+4)=2\ln(x+2)$ sur $I=\left]-2,+\infty\right[$
2. $\ln(x+3)+\ln(x+1)=\ln(x+13)$ sur $I=\left]-1,+\infty\right[$
3. $\ln(3x-1)-\ln(x)=\ln(2)$ sur $I=\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$
4. $\ln(x)=1$ sur $I=\left]0,+\infty\right[$

**Exercice 3** $(\star\star)$ – Résoudre les inéquations suivantes sur l'intervalle considéré.

1. $\ln(x-2)\leqslant 0$ sur $I=\left]2,+\infty\right[$
2. $\ln(4x+5)-\ln(x+2)\geqslant\ln(3)$ sur $I=\left]-\frac{5}{4},+\infty\right[$
3. $\ln(x-3)\geqslant 1$ sur $I=\left]3,+\infty\right[$
4. $\ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)\leqslant 0$ sur $I=\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$

**Exercice 4** $(\star\star)$ – Déterminer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$.

1. $f(x)=\frac{1}{\ln(x)}$
2. $f(x)=\frac{x}{\ln\left(x^2\right)}$
3. $f(x)=\ln\left(x^2-3x+1\right)$
4. $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$
5. $f(x)=\frac{\ln(2x)}{x^2}$
6. $f(x)=x-\ln(x)$

**Exercice 5** $(\star\star)$ – Déterminer les limites des fonctions suivantes en 0.

1. $f(x)=x-\ln(x)$
2. $f(x)=\left(x^2+1\right)\ln(x)$
3. $f(x)=x\ln\left(x^2\right)$
4. $f(x)=x\ln(x+1)$
5. $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$
6. $f(x)=\left(x^2-5x+6\right)\ln(x)$

**Exercice 6** $(\star\star)$ – Dans chacun des cas suivants, étudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction $f$ définie sur $\left]0,+\infty\right[$.

1. $f(x)=3x+2-\ln(x)$
2. $f(x)=\frac{2x+\ln(x)}{x}$
3. $f(x)=\frac{2\ln(x)-1}{x}$
4. $f(x)=\frac{1}{x}-\ln(x)$

**Exercice 7** $(\star\star\star)$ – Donner le domaine de définition et calculer la dérivée $f'(x)$ des fonctions suivantes.

1. $f(x)=x-2-2\ln(x)$
2. $f(x)=x\ln(x)$
3. $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$
4. $f(x)=x^2+1+2\ln(x)$
5. $f(x)=x^2\ln(x)$
6. $f(x)=\frac{x+3\ln(x)}{x}$
7. $f(x)=\ln(x-4)$
8. $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$
9. $f(x)=\frac{10}{\ln(4x-2)}$

**Exercice 8** $(\star\star\star)$ – Soit $f$ la fonction définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$.

1. Étudier les limites de $f$ en 0 et en $+\infty$.
2. On note $f'$ la dérivée de la fonction $f$. Calculer $f'(x)$.
3. Étudier les variations de $f$.
4. Tracer l'allure de la courbe de la fonction $f$.

**Exercice 9** $(\star\star\star)$ – Soit $f$ la fonction définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par $f(x)=\frac{\ln(x)}{x^2}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. a) Étudier les limites de $f$ aux bornes de son intervalle de définition.
   b) La courbe $C_f$ admet-elle des asymptotes ?
2. a) Montrer que $f'(x)=\frac{1-2\ln(x)}{x^3}$.
   b) Étudier les variations de la fonction $f$.
3. Donner une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

**Exercice 10** $(\star\star\star)$ –

**Partie I**

Soit $g$ la fonction définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par $g(x)=1-x^2-\ln(x)$.

1. Calculer la dérivée de la fonction $g$ et étudier son signe.
   En déduire les variations de la fonction $g$.
2. Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$ pour $x$ appartenant à l'intervalle $\left]0,+\infty\right[$.

**Partie II**

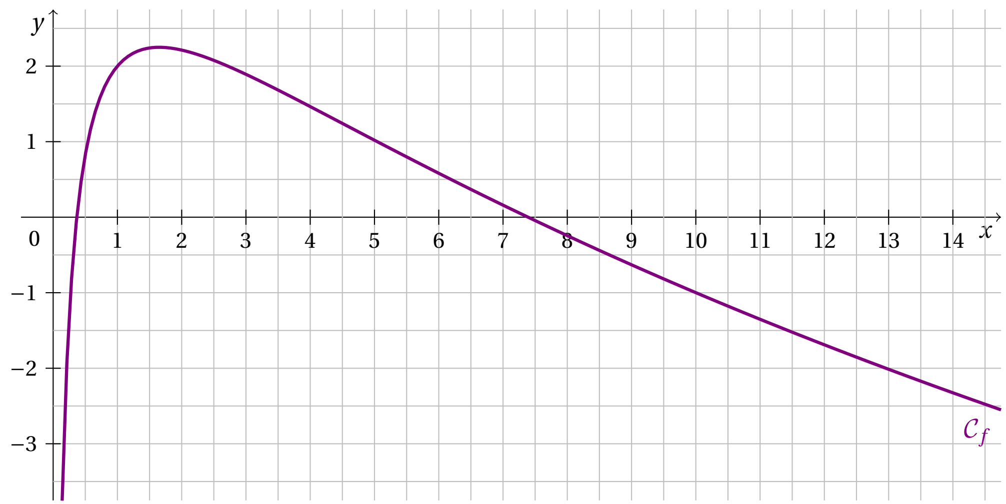
Soit $f$ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{2x} - \frac{x}{2} + 1.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. a) Calculer la limite de $f$ en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
   b) Calculer la limite de $f$ en $+\infty$.
   c) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -\frac{x}{2} + 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
   d) Calculer les coordonnées du point $A$, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$.
2. a) Montrer que pour tout réel $x$ appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, $\quad f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.
   b) En déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de la fonction $f$.
3. Tracer la droite $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère.

**Exercice 11** **(⋆ ⋆ ⋆) –** On considère la fonction $f$ définie et dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ telle que pour tout réel $x$ de cet intervalle, $\quad f(x) = (1 + \ln(x))(2 - \ln(x))$.
La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.




1. Calculer les limites de la fonction $f$ en 0 et en $+\infty$.
2. a) On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$. Calculer $f'(x)$ et vérifier que pour tout réel $x$ de l'intervalle $]0, +\infty[$,
   $$f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x}.$$
   b) Étudier les variations de $f$. On précisera la valeur exacte du maximum de $f$ et la valeur exacte de $x$ pour laquelle il est atteint.
3. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 et la tracer sur le graphique.
4. a) Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(1 + X)(2 - X) = 2$.
   c) En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 2$.

**Exercice 12** **(⋆ ⋆ ⋆) – Extrait d'ECRICOME 2019 / Ex2**
Soit $g$ la fonction numérique réelle définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = 2x - 1 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a) Calculer la limite de $g$ en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
   b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$. En déduire la limite de $g$ en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de $g$ sur $]0, +\infty[$ et dresser son tableau de variation.
3. a) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique $\mathcal{D}$ dont on précisera une équation.
   b) Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}$.

**Exercice 13** **(⋆ ⋆ ⋆) –** Calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{-2}{x}\,\mathrm{d}x$
2. $I_2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{4x}\,\mathrm{d}x$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^2 \frac{2x-1}{x^2 - x + 1}\,\mathrm{d}x$
4. $I_4 = \displaystyle\int_2^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)^2}{x}\,\mathrm{d}x$