12 | Fonction logarithme népérien

I – Définition et premières propriétés

Définition 12.1 – La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est **la** primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ qui prend la valeur 0 lorsque $x = 1$.

Proposition 12.2

De cette définition résultent trois conclusions immédiates :

- La fonction logarithme népérien est définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- La fonction logarithme népérien s'annule lorsque $x = 1$, *i.e.* $\ln(1) = 0$.
- Pour tout réel strictement positif $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Proposition 12.3 – Propriété fondamentale du logarithme

Pour tous nombres réels strictement positifs $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b).$$

Corollaire 12.4

De cette propriété algébrique fondamentale découlent plusieurs conséquences.

- Pour tout nombre réel strictement positif $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
- Pour tous nombres réels strictement positifs $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
- Pour tout nombre réel strictement positif $a \in \mathbb{R}_+^*$ et tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$.
- Pour tout nombre réel strictement positif $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$.

Démonstration.

- Grâce à la proposition précédente, je sais que $\ln\left(\dfrac{1}{a} \times a\right) = \ln\left(\dfrac{1}{a}\right) + \ln(a)$.

  Cependant $\dfrac{1}{a} \times a = 1$ donc $\ln\left(\dfrac{1}{a} \times a\right) = \ln(1) = 0$.

  Ainsi $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) + \ln(a) = 0$ et donc $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
- Je raisonne de la même manière pour les trois autres points.

$\square$

Exemple 12.5 – Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$. Simplifier le plus possible les expressions suivantes.

1. $\ln\left(x^2\right) - \ln(x)$
   $= 2\ln(x) - \ln(x) = \ln(x)$
2. $\ln(2x) - \ln(x)$
   $= \ln(2) + \ln(x) - \ln(x) = \ln(2)$
3. $\ln(x) - \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$
   $= \ln(x) + \ln(x) = 2\ln(x)$
4. $2\ln\left(x^3\right) + \ln\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$
   $= 6\ln(x) - 3\ln(x) = 3\ln(x)$
5. $\ln(1) + \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) + \ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
   $= 0 - \ln(x) - 2\ln(x) = -3\ln(x)$
6. $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) + \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$
   $= \ln(x) - \ln(y) + \ln(y) - \ln(x) = 0$

II – Étude de la fonction logarithme népérien

1 – Ensemble de définition

Proposition 12.6

La fonction logarithme népérien est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, *i.e.* sur $]0,+\infty[$, et a ses valeurs dans $\mathbb{R}$.

Ainsi dans le cas d'une fonction de la forme $f = \ln(u)$, l'ensemble de définition est donné par les solutions de l'inéquation $u(x) > 0$.

Exemple 12.7 – Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(x^2 - 3x + 2\right)$.

Je cherche pour quelles valeurs de x l'inéquation $x^2 - 3x + 2 > 0$ est vérifiée.
Je calcule le discriminant : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 > 0$. Il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{3-1}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3+1}{2} = 2.$$

J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Et donc la fonction f est définie sur $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$.

2 – Variations

Proposition 12.8

La fonction logarithme népérien est **continue** et **strictement croissante** sur $]0,+\infty[$.

Démonstration. La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0,+\infty[$ donc continue sur cet intervalle.
La dérivée de la fonction logarithme népérien est la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
Or si $x > 0$, alors $\dfrac{1}{x} > 0$. Donc la dérivée de la fonction est strictement positive et la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. □

Proposition 12.9

Pour tous réels strictement positifs $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(a) = \ln(b) \iff a = b \quad \text{et} \quad \ln(a) > \ln(b) \iff a > b.$$

Exemple 12.10 – Résoudre dans l'intervalle I les équations et inéquations suivantes.

1. $\ln(x+2) = 2\ln(x)$ sur $I =]0,+\infty[$

   $\ln(x+2) = 2\ln(x) \iff \ln(x+2) = \ln\left(x^2\right) \iff x+2 = x^2 \iff x^2 - x - 2 = 0$

   Je calcule alors le discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4\times 1\times(-2) = 1+8 = 9 > 0$.

   Il y a donc deux racines :

   $$x_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2\times 1} = \frac{1-3}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2.$$

   Je ne garde que la solution qui est dans l'intervalle $I =]0,+\infty[$, *i.e.* $x = 2$.

2. $\ln(2x-3) + \ln(3) = 2\ln(x)$ sur $I = \left]\frac{3}{2},+\infty\right[$

   $$\begin{aligned}\ln(2x-3)+\ln(3) = 2\ln(x) &\iff \ln\big((2x-3)\times 3\big) = \ln\left(x^2\right) \iff \ln(6x-9) = \ln\left(x^2\right)\\ &\iff 6x-9 = x^2 \iff x^2-6x+9 = 0\end{aligned}$$

   Je calcule alors le discriminant : $\Delta = (-6)^2 - 4\times 1\times 9 = 36-36 = 0$.

   Il y a donc une unique racine :

   $$x_0 = -\frac{-6}{2\times 1} = 3.$$

   De plus, 3 est bien dans l'intervalle $\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$ donc l'unique solution de l'équation est $x = 3$.

3. $\ln(x) + \ln(x+2) = \ln(9x-12)$ sur $I = \left]\frac{4}{3},+\infty\right[$

   $$\begin{aligned}\ln(x)+\ln(x+2) = \ln(9x-12) &\iff \ln\big(x(x+2)\big) = \ln(9x-12) \iff \ln\left(x^2+2x\right) = \ln(9x-12)\\ &\iff x^2+2x = 9x-12 \iff x^2-7x+12 = 0\end{aligned}$$

   Je calcule le discriminant : $\Delta = (-7)^2 - 4\times 1\times 12 = 49-48 = 1 > 0$.

   Il y a donc deux racines :

   $$x_1 = \frac{-(-7)-\sqrt{1}}{2\times 1} = \frac{7-1}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{7+1}{2} = 4.$$

   Ces deux racines sont dans l'intervalle $\left]\frac{4}{3},+\infty\right[$ donc l'équation considérée admet deux solutions $x = 3$ et $x = 4$.

4. $\ln(3x-1) - \ln(x) = \ln(2)$ sur $I = \left]\frac{1}{3},+\infty\right[$

   $$\begin{aligned}\ln(3x-1)-\ln(x) = \ln(2) &\iff \ln(3x-1) = \ln(2)+\ln(x) \iff \ln(3x-1) = \ln(2x)\\ &\iff 3x-1 = 2x \iff x-1 = 0 \iff x = 1\end{aligned}$$

   Or 1 est bien dans l'intervalle $\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$ donc l'équation considérée admet $x = 1$ comme unique solution.

5. $\ln(2x) < \ln(x+7)$ sur $I =]0,+\infty[$

   $\ln(2x) < \ln(x+7) \iff 2x < x+7 \iff x < 7$

   Il faut donc que $x < 7$ et que x soit dans l'intervalle $]0,+\infty[$. Finalement $\mathcal{S} =]0,7[$.

6. $\ln(3x+1) - \ln(x+1) \geqslant \ln(2)$ sur $I = \left]-\frac{1}{3},+\infty\right[$

   $$\begin{aligned}\ln(3x+1)-\ln(x+1) \geqslant \ln(2) &\iff \ln(3x+1) \geqslant \ln(2)+\ln(x+1) \iff \ln(3x+1) \geqslant \ln\big(2(x+1)\big)\\ &\iff 3x+1 \geqslant 2x+2 \iff x \geqslant 1\end{aligned}$$

   Il faut donc que $x \geqslant 1$ et que x soit dans l'intervalle $\left]-\frac{1}{3},+\infty\right[$. Finalement $\mathcal{S} = [1,+\infty[$.

Corollaire 12.11

En particulier, puisque $\ln(1) = 0$, pour tout réel strictement positif $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(x) = 0 \iff x = 1, \qquad \ln(x) > 0 \iff x > 1 \quad \text{et} \quad \ln(x) < 0 \iff 0 < x < 1.$$

ATTENTION ! La fonction logarithme est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ mais prend des valeurs négatives !

3 – Limites

Proposition 12.12

La fonction logarithme népérien a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, *i.e.*

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty.$$

La fonction logarithme népérien a pour limite $-\infty$ en 0^+, *i.e.*

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

L'axe des ordonnées est **asymptote verticale** à la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

Exemple 12.13 – Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right)$, $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right)$ et $\displaystyle\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right)$.

- Je calcule la limite du quotient puis la limite de la fonction composée :

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2 = \quad 2 \\ \lim_{X\to 2} \ln(X) = \ln(2) \end{aligned}\right\} \text{Par composition,} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right) = \ln(2).$$

- Je calcule la limite du quotient puis la limite de la fonction composée :

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 3^+} 2x-1 &= 5 \\ \lim_{x\to 3^+} x-3 &= 0^+ \end{aligned}\right\} \text{Par quotient,} \quad \lim_{x\to 3^+} \frac{2x-1}{x-3} = +\infty.$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 3^+} \frac{2x-1}{x-3} &= +\infty \\ \lim_{X\to+\infty} \ln(X) &= +\infty \end{aligned}\right\} \text{Par composition,} \quad \lim_{x\to 3^+} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right) = +\infty.$$

- Je calcule la limite du quotient puis la limite de la fonction composée :

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to \frac{1}{2}^-} 2x-1 &= 0^- \\ \lim_{x\to \frac{1}{2}^-} x-3 &= -\frac{5}{2} \end{aligned}\right\} \text{Par quotient,} \quad \lim_{x\to \frac{1}{2}^-} \frac{2x-1}{x-3} = 0^+.$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to \frac{1}{2}^-} \frac{2x-1}{x-3} &= 0^+ \\ \lim_{X\to 0^+} \ln(X) &= -\infty \end{aligned}\right\} \text{Par composition,} \quad \lim_{x\to \frac{1}{2}^-} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right) = -\infty.$$

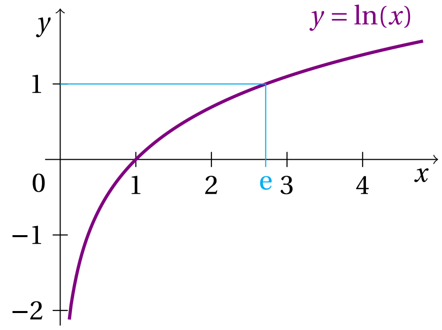
4 – Nombre e

D'après les résultats des paragraphes précédents, la fonction logarithme népérien présente le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
ln	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit donc l'allure de la courbe de la fonction logarithme.

On observe graphiquement qu'il existe un point unique de la courbe qui a pour ordonnée 1.
Son abscisse est voisine de 2.7.
Au-delà de cette observation graphique, l'existence d'un unique antécédent de 1 repose sur la variation de la fonction logarithme népérien qui est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et qui prend chaque valeur réelle une fois et une seule quand x varie dans l'intervalle $]0,+\infty[$.
Il existe donc un et un seul réel x tel que $\ln(x) = 1$.



Définition 12.14 – e est le nombre réel défini par l'équation $\ln(\mathrm{e}) = 1$.

Remarque 12.15 – Une valeur approchée *(à connaître)* de e est donnée par $\mathrm{e} \approx 2.72$.

5 – Croissances comparées

Il existe aussi quelques limites remarquables, qui font intervenir la fonction logarithme.
On étudie ce que l'on appelle des résultats de *croissances comparées.*

Proposition 12.16

Pour tout entier naturel non nul n,

$$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0.$$

En particulier lorsque $n = 1$,

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

Remarque 12.17 – Ces limites sont normalement des **formes indéterminées**.
Pour lever de telles indéterminations, on applique les résultats de *croissances comparées.*
On retient que les puissances "l'emportent" sur le logarithme.

Exemple 12.18 – Calculer $\lim_{x\to 0^+} x^3 \ln(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2 - \ln(x)$.

Par croissances comparées, et en réécrivant $x^2 - \ln(x) = x^2\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)$, alors

$$\lim_{x\to 0^+} x^3 \ln(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2 - \ln(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \frac{\ln(x)}{x^2}\right) = +\infty.$$

III – Étude d'une fonction de la forme $\ln(u)$

Proposition 12.19

Soit u une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I.
La fonction composée $f = \ln \circ u$, définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \ln\big(u(x)\big)$$

est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Exemple 12.20 – Soit f la fonction définie sur $]2, +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(x^2 - 3x + 2\right)$. Calculer $f'(x)$.
La fonction f est de la forme $f = \ln(u)$ avec $u(x) = x^2 - 3x + 2$. Alors $u'(x) = 2x - 3$ et donc

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x-3}{x^2-3x+2}.$$

Exemple 12.21 – Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(x^2 - 5x + 6\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
   La fonction f est définie lorsque $x^2 - 5x + 6 > 0$. Je résous l'inéquation $x^2 - 5x + 6 > 0$.
   Le discriminant vaut $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$. Il y a donc deux racines :

   $$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

   J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Et donc la fonction f est définie sur $]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   Je dois calculer les limites de f en $-\infty$, 2^-, 3^+ et $+\infty$.

   $$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 - 5x + 6 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty \end{array}\right\} \text{Par composition,} \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(x^2 - 5x + 6\right) = +\infty.$$

   $$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to 2^-} x^2 - 5x + 6 = 0^+ \\ \lim\limits_{X \to 0^+} \ln(X) = -\infty \end{array}\right\} \text{Par composition,} \quad \lim\limits_{x \to 2^-} \ln\left(x^2 - 5x + 6\right) = -\infty.$$

   $$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to 3^+} x^2 - 5x + 6 = 0^+ \\ \lim\limits_{X \to 0^+} \ln(X) = -\infty \end{array}\right\} \text{Par composition,} \quad \lim\limits_{x \to 3^+} \ln\left(x^2 - 5x + 6\right) = -\infty.$$

   $$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 5x + 6 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty \end{array}\right\} \text{Par composition,} \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(x^2 - 5x + 6\right) = +\infty.$$

3. Étudier les variations de la fonction f.

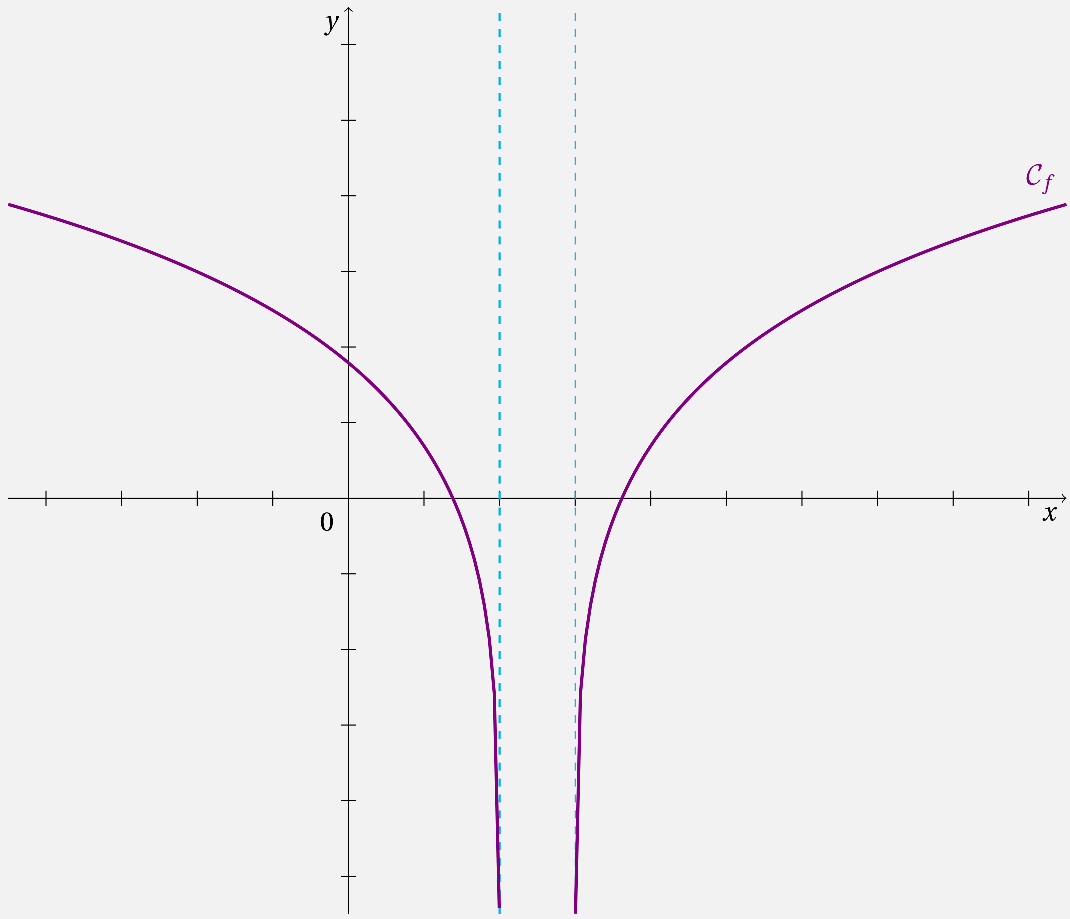
Pour étudier les variations de la fonction f, il faut connaître la dérivée f' puis étudier son signe.
La fonction f est de la forme $f = \ln(u)$ avec $u(x) = x^2 - 5x + 6$. Alors $u'(x) = 2x - 5$ et donc

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x-5}{x^2-5x+6}.$$

Je connais déjà le signe de $x^2 - 5x + 6$, positif sur tout l'ensemble de définition.
J'étudie maintenant le signe de $2x - 5$: $2x - 5 \geqslant 0 \iff 2x \geqslant 5 \iff x \geqslant \frac{5}{2}$.
J'en déduis alors le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		2		$\frac{5}{2}$		3		$+\infty$
$2x-5$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-5x+6		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$						$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$				$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Tracer l'allure de la courbe de la fonction f.



IV – Primitives et fonction logarithme

La fonction logarithme népérien étant désormais connue, on peut compléter le tableau des primitives usuelles en y ajoutant les deux lignes suivantes :

f est définie sur I par	**une primitive F est donnée par**
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln(\lvert x\rvert)$
$f = \dfrac{u'}{u}$	$F = \ln(\lvert u\rvert)$

Remarque 12.22 – On rappelle qu'une primitive est définie sur un intervalle.
Il suffit donc de regarder le signe de la fonction u sur l'intervalle pour retirer la fonction valeur absolue.
Majoritairement $u(x) > 0$ sur l'intervalle proposé.

Exemple 12.23 – Calculer les primitives des fonctions suivantes sur l'intervalle donné.

1. $f(x) = \dfrac{2}{3x}$ sur $I =]0, +\infty[$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$
3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}$

1. La fonction f est de la forme $f = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{x}$, donc une primitive est donnée par $F(x) = \dfrac{2}{3} \times \ln(x)$.
   La valeur absolue n'est pas nécessaire ici puisque $x > 0$ sur $I =]0, +\infty[$.

2. La fonction f est la somme de deux fonctions dont je peux calculer une primitive.
   En effet, sur $I =]0, +\infty[$, une primitive de $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$ est donnée par $F_1(x) = \ln(x)$
   et une primitive de $f_2(x) = \dfrac{1}{x+1}$ est donnée par $F_2(x) = \ln(x+1)$.
   Donc une primitive de f est donnée par
   $$F(x) = \ln(x) - \ln(x+1) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

3. La fonction f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2+1$. Puisque $u'(x) = 2x$, alors
   $$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{x^2+1} = 2f(x).$$
   Donc une primitive de f est donnée par
   $$F(x) = \frac{1}{2}\ln(\lvert u(x)\rvert) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$