12 Fonction logarithme népérien

I – Définition et premières propriétés

Définition 12.1 – La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est **la** primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ qui prend la valeur 0 lorsque $x = 1$.

Proposition 12.2

De cette définition résultent trois conclusions immédiates :

- La fonction logarithme népérien est définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- La fonction logarithme népérien s'annule lorsque $x = 1$, *i.e.* $\ln(1) = 0$.
- Pour tout réel strictement positif $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Proposition 12.3 – Propriété fondamentale du logarithme

Pour tous nombres réels strictement positifs $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b).$$

Corollaire 12.4

De cette propriété algébrique fondamentale découlent plusieurs conséquences.

- Pour tout nombre réel strictement positif $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
- Pour tous nombres réels strictement positifs $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
- Pour tout nombre réel strictement positif $a \in \mathbb{R}_+^*$ et tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$.
- Pour tout nombre réel strictement positif $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

Démonstration.

□

Exemple 12.5 – Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$. Simplifier le plus possible les expressions suivantes.

1. $\ln\left(x^2\right) - \ln(x)$
2. $\ln(2x) - \ln(x)$
3. $\ln(x) - \ln\left(\frac{1}{x}\right)$
4. $2\ln\left(x^3\right) + \ln\left(\frac{1}{x^3}\right)$
5. $\ln(1) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$
6. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln\left(\frac{y}{x}\right)$

II – Étude de la fonction logarithme népérien

1 – Ensemble de définition

Proposition 12.6

La fonction logarithme népérien est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, *i.e.* sur $]0, +\infty[$, et a ses valeurs dans $\mathbb{R}$.

Ainsi dans le cas d'une fonction de la forme $f = \ln(u)$, l'ensemble de définition est donné par les solutions de l'inéquation $u(x) > 0$.

Exemple 12.7 – Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(x^2 - 3x + 2\right)$.

2 – Variations

Proposition 12.8

La fonction logarithme népérien est **continue** et **strictement croissante** sur $]0, +\infty[$.

Démonstration.

□

Proposition 12.9

Pour tous réels strictement positifs $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(a) = \ln(b) \iff a = b \quad \text{et} \quad \ln(a) > \ln(b) \iff a > b.$$

Exemple 12.10 – Résoudre dans l'intervalle I les équations et inéquations suivantes.

1. $\ln(x+2) = 2\ln(x)$ sur $I =]0, +\infty[$

2. $\ln(2x-3) + \ln(3) = 2\ln(x)$ sur $I = \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$

3. $\ln(x) + \ln(x+2) = \ln(9x-12)$ sur $I = \left]\frac{4}{3}, +\infty\right[$

4. $\ln(3x-1) - \ln(x) = \ln(2)$ sur $I = \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$

5. $\ln(2x) < \ln(x+7)$ sur $I =]0, +\infty[$

6. $\ln(3x+1) - \ln(x+1) \geqslant \ln(2)$ sur $I = \left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$

Corollaire 12.11

En particulier, puisque $\ln(1) = 0$, pour tout réel strictement positif $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(x) = 0 \iff x = 1, \qquad \ln(x) > 0 \iff x > 1 \quad \text{et} \quad \ln(x) < 0 \iff 0 < x < 1.$$

ATTENTION ! La fonction logarithme est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ mais prend des valeurs négatives !

3 – Limites

Proposition 12.12

La fonction logarithme népérien a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, *i.e.*

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

La fonction logarithme népérien a pour limite $-\infty$ en 0^+, *i.e.*

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

L'axe des ordonnées est **asymptote verticale** à la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

Exemple 12.13 – Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right)$, $\displaystyle\lim_{x \to 3^+} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right)$ et $\displaystyle\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right)$.

-

-

-

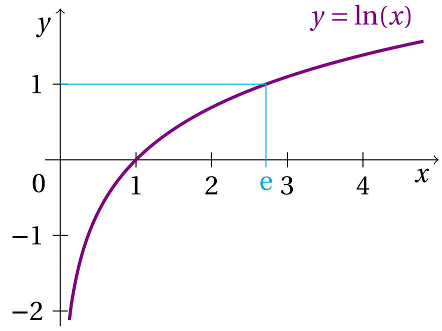
4 – Nombre e

D'après les résultats des paragraphes précédents, la fonction logarithme népérien présente le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$\ln$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit donc l'allure de la courbe de la fonction logarithme.

On observe graphiquement qu'il existe un point unique de la courbe qui a pour ordonnée 1.
Son abscisse est voisine de 2.7.
Au-delà de cette observation graphique, l'existence d'un unique antécédent de 1 repose sur la variation de la fonction logarithme népérien qui est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et qui prend chaque valeur réelle une fois et une seule quand x varie dans l'intervalle $]0,+\infty[$.
Il existe donc un et un seul réel x tel que $\ln(x) = 1$.



Définition 12.14 – e est le nombre réel défini par l'équation $\ln(\mathrm{e}) = 1$.

Remarque 12.15 – Une valeur approchée *(à connaître)* de e est donnée par $\mathrm{e} \approx 2.72$.

5 – Croissances comparées

Il existe aussi quelques limites remarquables, qui font intervenir la fonction logarithme.
On étudie ce que l'on appelle des résultats de *croissances comparées*.

Proposition 12.16

Pour tout entier naturel non nul n,

$$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0.$$

En particulier lorsque $n = 1$,

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

Remarque 12.17 – Ces limites sont normalement des **formes indéterminées**.
Pour lever de telles indéterminations, on applique les résultats de *croissances comparées*.
On retient que les puissances "l'emportent" sur le logarithme.

Exemple 12.18 – Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 \ln(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - \ln(x)$.

III – Étude d'une fonction de la forme $\ln(u)$

Proposition 12.19

Soit u une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I.
La fonction composée $f = \ln \circ u$, définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \ln\big(u(x)\big)$$

est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Exemple 12.20 – Soit f la fonction définie sur $]2, +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(x^2 - 3x + 2\right)$. Calculer $f'(x)$.

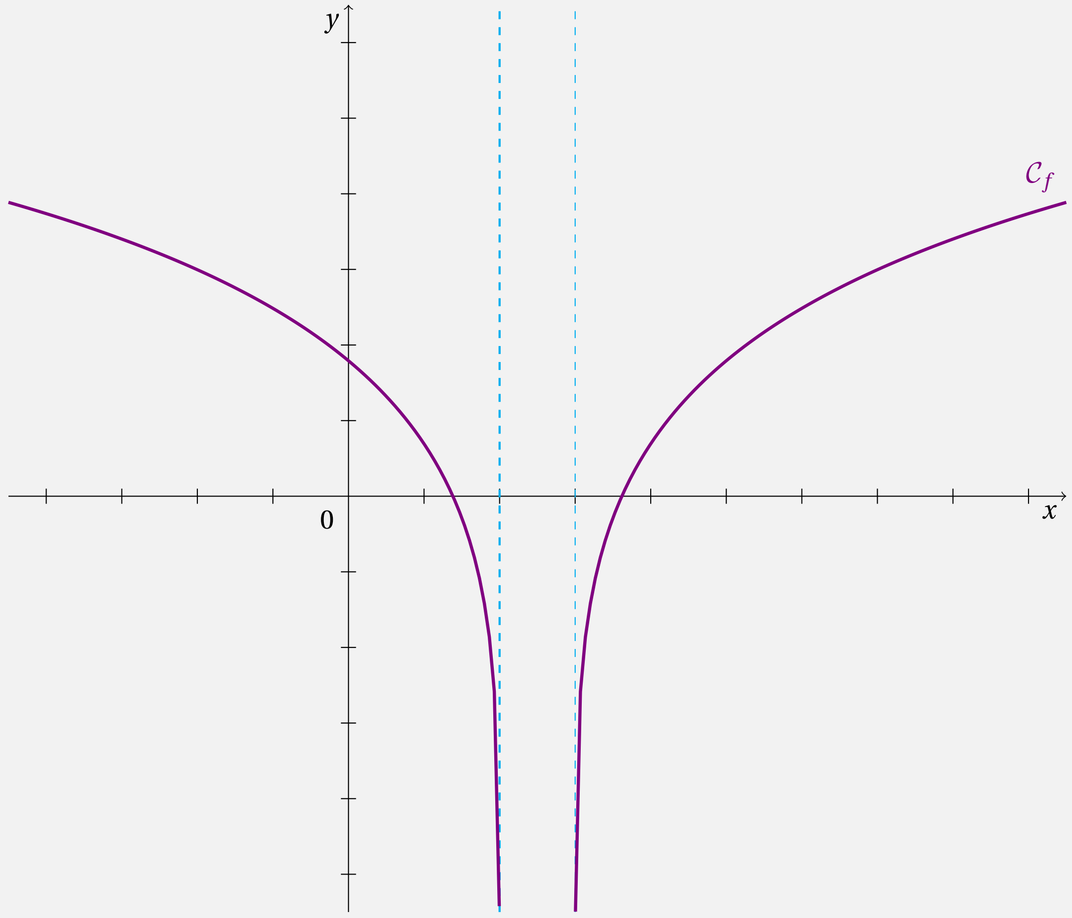
Exemple 12.21 – Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(x^2 - 5x + 6\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3. Étudier les variations de la fonction f.

4. Tracer l'allure de la courbe de la fonction f.



IV – Primitives et fonction logarithme

La fonction logarithme népérien étant désormais connue, on peut compléter le tableau des primitives usuelles en y ajoutant les deux lignes suivantes :

f **est définie sur** I **par**	**une primitive** F **est donnée par**
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln\left(\lvert x\rvert\right)$
$f = \dfrac{u'}{u}$	$F = \ln\left(\lvert u\rvert\right)$

Remarque 12.22 – On rappelle qu'une primitive est définie sur un intervalle.
Il suffit donc de regarder le signe de la fonction u sur l'intervalle pour retirer la fonction valeur absolue.
Majoritairement $u(x) > 0$ sur l'intervalle proposé.

Exemple 12.23 – Calculer les primitives des fonctions suivantes sur l'intervalle donné.

1. $f(x) = \dfrac{2}{3x}$ sur $I = \left]0, +\infty\right[$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$
3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}$

1.

2.

3.