Exercices — Chapitre 11

Exercice 1 ($\star$) – Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f.

1. $f(x) = x^2 - 3x + 7$
2. $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$
4. $f(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{2}$
5. $f(x) = x^3 - 4x + \sqrt{2}$
6. $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{3} + 1$
7. $f(x) = 3x + \dfrac{3}{x^2}$
8. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2}$
9. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$

Exercice 2 ($\star\star$) – Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f.

1. $f(x) = (7x+1)^8$ sur $\mathbb{R}$
2. $f(x) = \dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^4}$ sur $\mathbb{R}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$ sur $]-1,+\infty[$
4. $f(x) = (x+1)\left(x^2+2x-3\right)^3$ sur $\mathbb{R}$
5. $f(x) = \dfrac{3}{(2x-1)^3}$ sur $\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$
6. $f(x) = \dfrac{x}{\left(x^2-1\right)^2}$ sur $]1,+\infty[$
7. $f(x) = \dfrac{4}{(1-2x)^2}$ sur $\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$

Exercice 3 ($\star\star$) – Dans chacun des cas suivants, calculer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée.

1. $f(x) = x^2 - 5x - 1$ sur $\mathbb{R}$ et $F\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$
2. $f(x) = 3x^2 - 5x + \dfrac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$ et $F(1) = 0$
3. $f(x) = x - \dfrac{1}{x^2} + 1$ sur $]0,+\infty[$ et $F(1) = 2$
4. $f(x) = x^3 + \dfrac{2}{x^2}$ sur $]0,+\infty[$ et $F(1) = -\dfrac{1}{4}$
5. $f(x) = 2x^3 - 1 - \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0,+\infty[$ et $F(1) = 1$

Exercice 4 ($\star\star$) – Soient F et G les fonctions définies sur $I =]-1,+\infty[$ par

$$F(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1} \quad \text{et} \quad G(x) = x - 2 + \frac{1}{x+1}.$$

Montrer que F et G sont deux primitives sur I d'une même fonction f que l'on précisera.

Exercice 5 ($\star\star$) – Soit f la fonction définie sur $\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2-4x}{\left(2x^2+x-1\right)^2}$.

Montrer que la fonction G définie sur $\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ par $G(x) = \dfrac{2x^2}{2x^2+x-1}$ est une primitive de la fonction f.

Exercice 6 ($\star\star\star$) – Calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^{2} \left(x^2 - 3x + 1\right) \mathrm{d}x$
2. $I_2 = \displaystyle\int_{2}^{6} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2} - 1\right) \mathrm{d}x$
3. $I_3 = \displaystyle\int_{-2}^{3} \left(x^3 + x - 2\right) \mathrm{d}x$
4. $I_4 = \displaystyle\int_{0}^{1} (2x+3)^3 \,\mathrm{d}x$
5. $I_5 = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}} \,\mathrm{d}t$
6. $I_6 = \displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x}{\left(2+x^2\right)^2} \,\mathrm{d}x$

Exercice 7 ($\star\star\star$) – Soient a un réel et f la fonction définie sur $[-1,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-a}{2} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ \dfrac{1+a}{2} & \text{si } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Vérifier que $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Exercice 8 ($\star\star$) – Montrer que la fonction F définie sur $]1,+\infty[$ par $F(x) = \dfrac{x^2+3x-1}{x-1}$ est une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$.
En déduire la valeur de

$$\int_2^3 \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 9 ($\star\star$) – Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \left(x^3+1\right)^4$ est une primitive de la fonction f définie par $f(x) = 12x^2\left(x^3+1\right)^3$.
En déduire la valeur de

$$\int_0^1 12x^2\left(x^3+1\right)^3\mathrm{d}x.$$