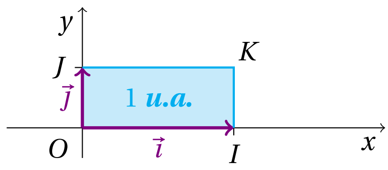
11 Intégrales et primitives

I – Intégrale et aire

1 – Unité d'aire

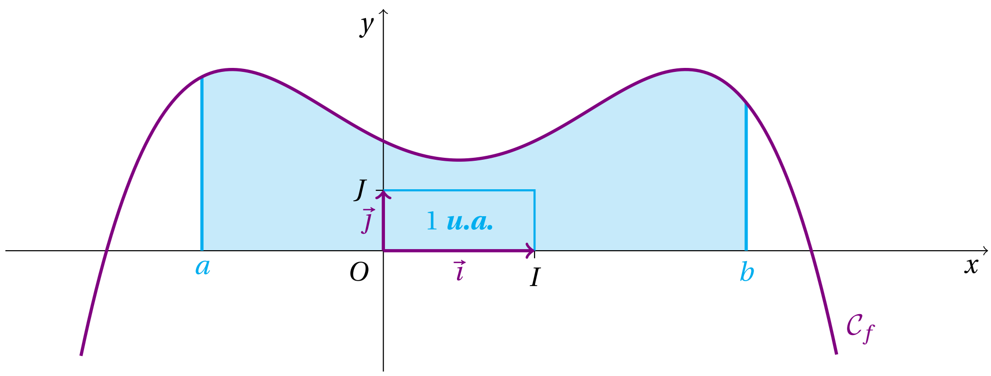
Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthogonal du plan.
L'unité d'aire, notée *u.a.*, est l'aire du rectangle unitaire $OIKJ$ avec $I(1,0)$, $J(0,1)$ et $K(1,1)$.



2 – Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition 11.1 – Soient f une fonction définie, **continue** et **positive** sur un intervalle $[a,b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
L'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x=a$ et $x=b$.

Ce nombre est noté $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



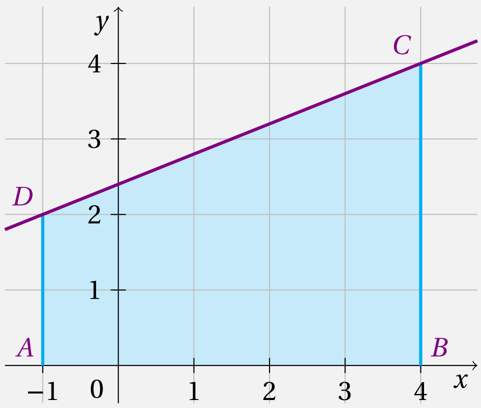
Remarque 11.2 –

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se lit "intégrale de a à b de $f(x)\,\mathrm{d}x$".
- Les réels a et b sont appelés les **bornes** de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
- La variable x est dite *"muette"*. Elle n'intervient pas dans le résultat, c'est-à-dire qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable distincte des lettres a et b : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$.
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ car le domaine $\mathcal{D}_f$ est alors réduit à un segment.

Exemple 11.3 – Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{2x+12}{5}\,\mathrm{d}x$.

La fonction affine f définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{2x+12}{5}$ est continue et positive sur l'intervalle $[-1,4]$. L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{2x+12}{5}\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire du trapèze $ABCD$.

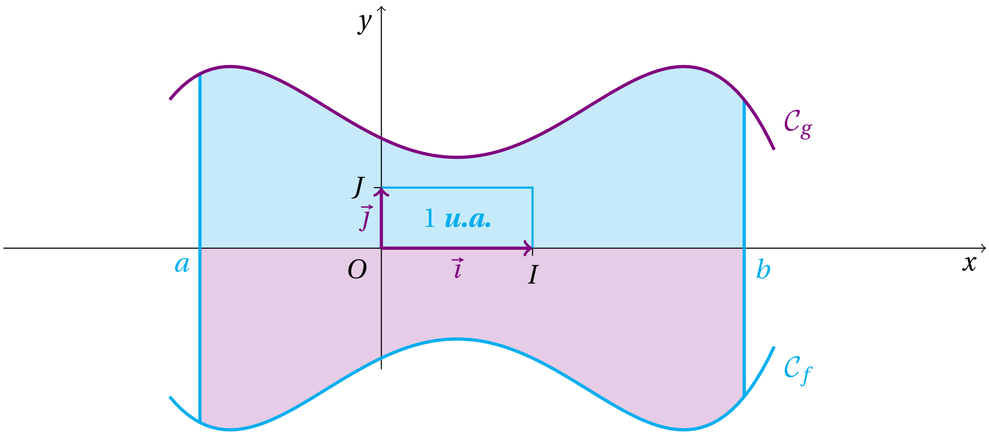
$$\int_{-1}^{4} \frac{2x+12}{5}\,\mathrm{d}x = \frac{(AD+BC)\times AB}{2} = \frac{(2+4)\times 5}{2} = 15.$$



3 – Intégrale d'une fonction continue et négative

Si f est une fonction continue et **négative** sur un intervalle $[a,b]$, alors la fonction g définie sur l'intervalle $[a,b]$ par $g(x) = -f(x)$ est une fonction continue et **positive** sur cet intervalle.

Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du domaine $\mathcal{D}_g$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Définition 11.4 – Soient f une fonction définie, continue et négative sur un intervalle $[a,b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
L'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à l'opposé de l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathcal{A}.$$

4 – Lien entre intégrale et dérivée

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. On peut définir une nouvelle fonction F qui, à tout réel x de l'intervalle $[a,b]$, associe l'intégrale de la fonction f entre a et x : $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème 11.5

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$.
La fonction F définie sur $[a,b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a,b]$ et sa dérivée est f.

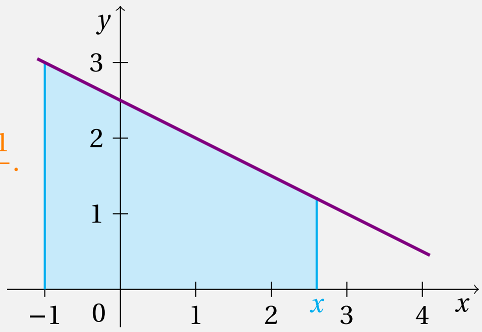
Exemple 11.6 – Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1,4]$ par $f(x) = \dfrac{5-x}{2}$.

Si x est un réel de l'intervalle $[-1,4]$, la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$ est égale à l'aire du trapèze colorié. Donc

$$F(x) = \frac{\left(3+\frac{5-x}{2}\right)(1+x)}{2} = \frac{(11-x)(1+x)}{4} = \frac{-x^2+10x+11}{4}.$$

La fonction F est bien dérivable sur $[-1,4]$ et

$$\forall x \in [-1,4], \quad F'(x) = \frac{1}{4}\times(-2x+10) = \frac{5-x}{2} = f(x).$$



II – Primitives

1 – Définition

Définition 11.7 – Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit qu'une fonction F est une **primitive** de la fonction f sur I si F est dérivable et que

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

Exemple 11.8 – Vérifier les assertions suivantes.

- $F : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 1$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto 3x^2 + 6x$.
  En effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad F'(x) = 3x^2 + 6x = f(x)$.
- $G : x \mapsto 2\sqrt{x}$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
  En effet pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad G'(x) = 2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = g(x)$.
- Les fonctions $F : x \mapsto x^2$, $G : x \mapsto x^2 + 1$, mais aussi $H : x \mapsto x^2 + c$, pour tout $c \in \mathbb{R}$ sont des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 2x$.
  En effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad F'(x) = G'(x) = H'(x) = 2x = f(x)$.

Remarque 11.9 –

- Comme F est dérivable sur I, la fonction F est en particulier continue sur I.
- Il n'y a pas unicité de la primitive d'une fonction donnée f.
  C'est pourquoi on parle d'**une** primitive de la fonction f et non de **la** primitive de la fonction f.

Théorème 11.10

- Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.
- Si F est une primitive de f sur I, alors toute autre primitive de f sur I est de la forme $F + C$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.
- Il existe une et une seule primitive de f sur I qui prend une valeur donnée en un point donné :
  Pour $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F_0 de f sur I telle que $F_0(x_0) = y_0$.

Exemple 11.11 – Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2 - 1$ est la primitive de la fonction $f : x \mapsto 2x$ qui vérifie $F(1) = 0$.
En effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad F'(x) = 2x = f(x) \quad$ et $\quad F(1) = 1^2 - 1 = 0$.

2 – Primitives des fonctions usuelles

Étant donnée la définition d'une primitive, certains résultats connus pour les fonctions dérivées se prolongent aux fonctions primitives.

Proposition 11.12

- Si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.
- Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et λ un réel, alors λF est une primitive de λf sur I.

Proposition 11.13 – Primitives des fonctions usuelles

Le tableau suivant récapitule les primitives des fonctions usuelles.

f **est définie sur** I **par**	**une primitive** F **est donnée par**	**validité**
$f(x) = a \qquad (a \in \mathbb{R})$	$F(x) = ax$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{x}$	sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} \qquad (n \geqslant 2$ entier$)$	$F(x) = -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	sur $\mathbb{R}_+^*$

Exemple 11.14 – Calculer les primitives des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 3x^2$
   $F(x) = 3 \times \dfrac{x^3}{3} + C = x^3 + C$
2. $f(x) = x + \dfrac{3}{2}$
   $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{2}x + C$
3. $f(x) = (2x+1)(x-3)$
   Tout d'abord, je développe $f(x) = (2x+1)(x-3) = 2x^2 - 6x + x - 3 = 2x^2 - 5x - 3$.
   Ainsi une primitive est donnée par $F(x) = 2 \times \dfrac{x^3}{3} - 5 \times \dfrac{x^2}{2} - 3x + C = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 - 3x + C$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
   $F(x) = -\dfrac{1}{x} + C$
5. $f(x) = x^2 + 3x + \dfrac{1}{x^2}$
   $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 3 \times \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{x} + C = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{x} + C$
6. $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$
   $F(x) = -\dfrac{1}{4x^4} + C$
7. $f(x) = x + 2 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
   $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2x + 2\sqrt{x} + C = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 2\sqrt{x} + C$
8. $f(x) = \dfrac{6x^2 - 8x + 2}{5}$
   $F(x) = \dfrac{2x^3 - 4x^2 + 2x}{5} + C$
9. $f(x) = -\dfrac{6}{x^4}$
   $F(x) = -6 \times \left(-\dfrac{1}{3x^3}\right) = \dfrac{2}{x^3} + C$
10. $f(x) = x^2 + 3x - 2$
    $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 3\dfrac{x^2}{2} - 2x + C = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - 2x + C$
11. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} + 3x^2 - \dfrac{1}{x^2}$
    $F(x) = 2 \times 2\sqrt{x} + 3 \times \dfrac{x^3}{3} - \left(-\dfrac{1}{x}\right) + C$
    $= 4\sqrt{x} + x^3 + \dfrac{1}{x} + C$

3 – Primitives des fonctions composées usuelles

Proposition 11.15 – Primitives des fonctions composées

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
Le tableau suivant récapitule les primitives des fonctions composées.

Conditions	**fonction f**	**une primitive F est donnée par**
$n \in \mathbb{N}^*$	$f = u' \times u^n$	$F = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
u ne s'annule pas sur I	$f = \dfrac{u'}{u^2}$	$F = -\dfrac{1}{u}$
u ne s'annule pas sur I et $n > 1$	$f = \dfrac{u'}{u^n}$	$F = -\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
u strictement positive sur I	$f = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u}$

Méthode 11.16 – Calculer une primitive d'une fonction composée
Pour calculer une primitive d'une fonction composée f, il faut s'appuyer sur le tableau précédent.
On procède de la manière suivante :

1. On repère la forme de la fonction : un produit $u' \times u^n$, un quotient $\dfrac{u'}{u^n}$, etc.
2. On **identifie** la fonction u et on **calcule** sa dérivée u'.
3. On compare la forme repérée avec la fonction de départ. Il y a alors deux possibilités :
   - La forme repérée correspond **exactement** à la fonction de départ, auquel cas une primitive est directement donnée par la formule du tableau.
   - La forme repérée est de la forme $k \times f(x)$, auquel cas une primitive est donnée par la formule du tableau, **multipliée par** $\dfrac{1}{k}$.

Exemple 11.17 – Calculer une primitive des fonctions suivantes.

1. $f(x) = (2x+1)^2$
   f semble être de la forme $u'u^2$ avec $u(x) = 2x+1$. Puisque $u'(x) = 2$, alors
   $$u'(x)u(x)^2 = 2(2x+1)^2 = 2f(x).$$
   Donc une primitive de f est donnée par
   $$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u(x)^3}{3} = \frac{(2x+1)^3}{6}.$$

2. $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$
   f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x+1$. Puisque $u'(x) = 1$, alors
   $$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} = f(x).$$
   Donc une primitive de f est donnée par
   $$F(x) = -\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{x+1}.$$

3. $f(x) = \dfrac{1}{(1-3x)^2}$

   f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 1-3x$. Puisque $u'(x) = -3$, alors
$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{-3}{(1-3x)^2} = -3f(x).$$
   Donc une primitive de f est donnée par
$$F(x) = \frac{1}{-3} \times \left(-\frac{1}{u(x)}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1-3x} = \frac{1}{3-9x}.$$

4. $f(x) = (2x-1)\left(x^2-x+1\right)^3$

   f semble être de la forme $u'u^3$ avec $u(x) = x^2-x+1$. Puisque $u'(x) = 2x-1$, alors
$$u'(x)u(x)^3 = (2x-1)\left(x^2-x+1\right)^3 = f(x).$$
   Donc une primitive de f est donnée par
$$F(x) = \frac{u(x)^4}{4} = \frac{\left(x^2-x+1\right)^4}{4}.$$

5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

   f semble être de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x+2$. Puisque $u'(x) = 1$, alors
$$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x+2}} = f(x).$$
   Donc une primitive de f est donnée par
$$F(x) = 2\sqrt{u(x)} = 2\sqrt{x+2}.$$

Méthode 11.18 – Déterminer la primitive vérifiant une condition donnée

Pour déterminer **la** primitive F d'une fonction f vérifiant une condition donnée :

1. On commence par déterminer la forme générale de toutes les primitives de la fonction f :
   - ▷ Les primitives de f sont toutes de la forme $F + C$.
2. On utilise ensuite la condition que doit vérifier la primitive demandée pour déterminer la valeur de la constante C.

Exemple 11.19 – Calculer la primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ qui vérifie la condition $F(1) = 0$.

Je commence par déterminer la forme générale des primitives de f.
f est une fonction polynomiale donc je peux primitiver terme à terme :
$$F(x) = 3 \times \frac{x^3}{3} - 4 \times \frac{x^2}{2} + 2x + C = x^3 - 2x^2 + 2x + C.$$
Je dois maintenant déterminer la valeur de la constante C. Je sais que $F(1) = 0$ donc
$$F(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 + 2 + C = 0.$$
Autrement dit, $1 + C = 0$. Donc $C = -1$ et la primitive F de f qui vérifie $F(1) = 0$ est donnée par
$$F(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1.$$

III – Intégrale d'une fonction continue

1 – Définition

Définition 11.20 – Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I. Si F est une primitive de f sur I, alors l'intégrale de f entre a et b est le nombre réel égal à $F(b)-F(a)$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

Remarque 11.21 –

- La différence $F(b)-F(a)$ se note $\left[F(x)\right]_a^b$. Ainsi

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a).$$

- Puisqu'il s'agit de la différence entre deux termes, le résultat ne dépend pas de la primitive F choisie.

Exemple 11.22 – Calculer chacune des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^3 3t^2+2t-1\,\mathrm{d}t$

   Je commence par calculer une primitive de la fonction $f(t)=3t^2+2t-1$.
   Il s'agit d'une fonction polynomiale donc je peux primitiver terme à terme :

$$F(t) = 3\times\frac{t^3}{3}+2\times\frac{t^2}{2}-1\times t = t^3+t^2-t.$$

   Dès lors, l'intégrale se calcule grâce à cette primitive :

$$\int_1^3 3t^2+2t-1\,\mathrm{d}t = \left[t^3+t^2-t\right]_1^3 = \left(3^3+3^2-3\right)-\left(1^3+1^2-1\right) = 33-1 = 32.$$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x$

   Je commence par calculer une primitive de la fonction $f(x)=\dfrac{x}{\left(1+x^2\right)^2}$.

   La fonction semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x)=1+x^2$. Puisque $u'(x)=2x$, alors

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} = 2f(x).$$

   Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{u(x)}\right) = -\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}.$$

   Dès lors,

$$\int_0^1 \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}\right]_0^1 = -\frac{1}{2\left(1+1^2\right)}+\frac{1}{2\left(1+0^2\right)} = -\frac{1}{4}+\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Proposition 11.23

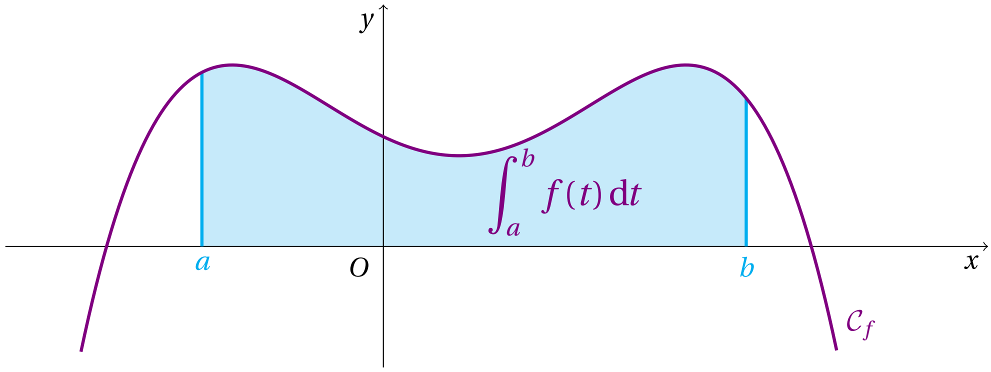
Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I. Alors

$$\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{et} \quad \int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2 – Premières propriétés

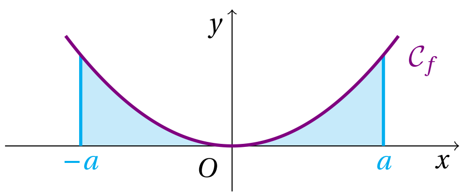
Proposition 11.24

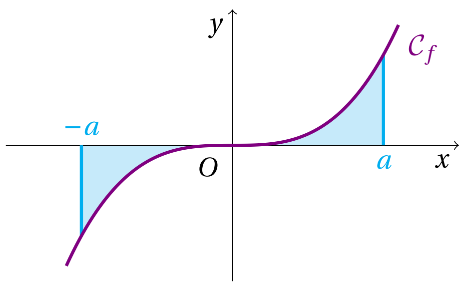
Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$, f une fonction continue et positive sur $[a,b]$ et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f. Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire de la surface comprise entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x=a$ et $x=b$.



Proposition 11.25

- Si la fonction f est continue et paire sur $[-a,a]$, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 2\times\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si la fonction f est continue et impaire sur $[-a,a]$, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.





Exemple 11.26 –

- $\displaystyle\int_{-1}^1 t^3\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 0$ puisque la fonction est impaire.
- $\displaystyle\int_{-1}^1 t^2+|t|\,\mathrm{d}t = 2\times\int_0^1 t^2+|t|\,\mathrm{d}t = 2\times\int_0^1 t^2+t\,\mathrm{d}t = 2\times\left[\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 2\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{3}$ par parité.

Proposition 11.27 – Relation de Chasles

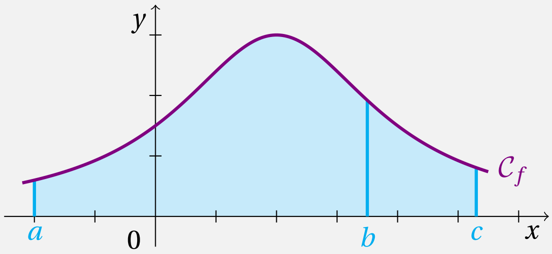
Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a, b et c trois réels de I. Alors

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 11.28 – Interprétation graphique

L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = c$ est égale à la somme des aires du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = b$ et $x = c$.

(f continue et positive sur $[a, c]$ et $a \leqslant b \leqslant c$).



Méthode 11.29 – Calculer l'intégrale d'une fonction f définie "par morceaux"

Pour calculer l'intégrale d'une fonction f dont l'expression est définie en plusieurs morceaux, on utilise la relation de Chasles. On décompose ainsi l'intégrale de f sur chaque intervalle sur lequel on connaît l'expression de f.

Exemple 11.30 – Soit f la fonction définie sur $[-2, 3]$ par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{si } 1 < x \leqslant 3. \end{cases}$$

Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

J'applique la relation de Chasles pour décomposer l'intégrale en deux morceaux sur lesquels je connais l'expression de f puis je remplace $f(x)$ par ces expressions :

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1} (x+1)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Il ne me reste alors plus qu'à calculer ces deux intégrales :

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-2}^{1} (x+1)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-2}^{1} + \left[\frac{1}{x}\right]_{1}^{3} \\ &= \left(\frac{1^2}{2} + 1\right) - \left(\frac{(-2)^2}{2} + (-2)\right) + \frac{1}{3} - \frac{1}{1} = \frac{1}{2} + 1 - 2 + 2 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{5}{6}.\end{aligned}$$